Matemática II

Examen parcial 2. **Guías** $7 - 11$.

Farith Briceño - 2016

Material en revisión

Indice

Aplicaciones de la integral definida. Área entre curvas.

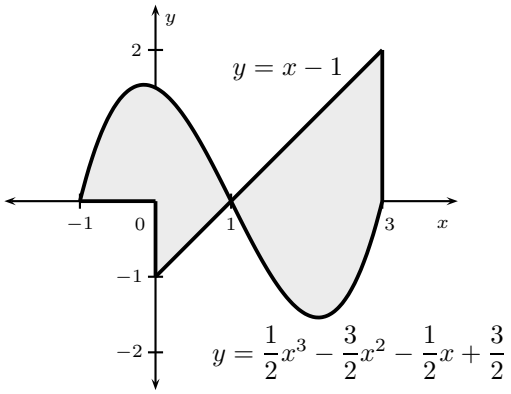
Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.7

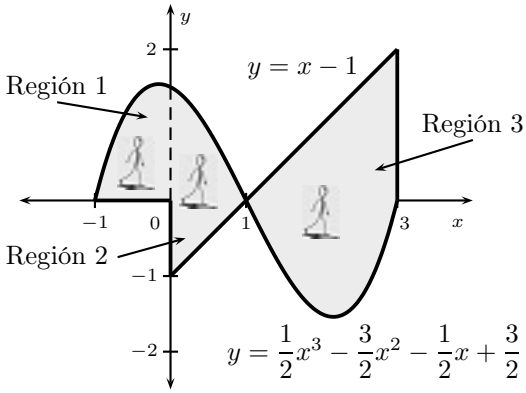
- Aplicaciones de la integral definida : Área entre curvas.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 106 *: Hallar el área de la región dada en la gráfica*



Solución : Al desplazarnos sobre el eje x, en el intervalo $[-1,3]$, observamos que la región se divide en tres subregiones



entonces, el área de la región viene dada por la suma de las áreas de estas tres subregiones, así,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-0\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-(x-1)\right)dx \\
&\qquad +\int_{1}^{3}\left(x-1-\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\right)dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-x+1\right)dx \\
&\qquad +\int_{1}^{3}\left(x-1-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)dx \\
&\qquad +\int_{1}^{3}\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)dx,
\end{aligned}
$$

donde

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right|_{-1}^{0}$$

$$=\left(\overbrace{\frac{1}{8}(0)^4-\frac{1}{2}(0)^3-\frac{1}{4}(0)^2+\frac{3}{2}(0)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right)-\left(\overbrace{\frac{1}{8}(-1)^4-\frac{1}{2}(-1)^3-\frac{1}{4}(-1)^2+\frac{3}{2}(-1)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{1+4-2-12}{8}\right)=-\left(\frac{-9}{8}\right)=\frac{9}{8},$$

mientras que,

$$\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{2}x\right|_{0}^{1}$$

$$=\left(\overbrace{\frac{1}{8}(1)^4-\frac{1}{2}(1)^3-\frac{3}{4}(1)^2+\frac{5}{2}(1)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right)-\left(\overbrace{\frac{1}{8}(0)^4-\frac{1}{2}(0)^3-\frac{3}{4}(0)^2+\frac{5}{2}(0)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{1-4-6+20}{8}=\frac{11}{8},$$

y por último

$$\int_{1}^{3}\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)dx=\left(-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x\right|_{1}^{3}$$

$$=\left(\overbrace{-\frac{1}{8}(3)^4+\frac{1}{2}(3)^3+\frac{3}{4}(3)^2-\frac{5}{2}(3)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right)-\left(\overbrace{-\frac{1}{8}(1)^4+\frac{1}{2}(1)^3+\frac{3}{4}(1)^2-\frac{5}{2}(1)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right)$$

$$=\left(-\frac{81}{8}+\frac{27}{2}+\frac{27}{4}-\frac{15}{2}\right)-\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-81+108+54-60}{8}\right)-\left(\frac{-1+4+6-20}{8}\right)=\frac{21}{8}-\left(\frac{-11}{8}\right)=\frac{32}{8}=4.$$

Así,

$$A=\frac{9}{8}+\frac{11}{8}+4=\frac{9+11+32}{8}=\frac{52}{8}=\frac{13}{2}.$$

Luego, $A=\dfrac{13}{2}.$ ★

Ejemplo 107 *: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de*

$$f(x) = x + 1 \qquad y \qquad g(x) = x^2 - 1.$$

Solución : Graficamos la región limitada por las gráficas de las funciones dadas.

Observemos que la función f es una recta de pendiente $m = 1$ y punto de corte con el eje de las ordenadas igual a $(0, 1)$, mientras que la función g es una parábola trasladada verticalmente una unidad hacia abajo.

Buscamos los puntos de intersección entre las curvas, para ello igualamos las funciones y resolvemos

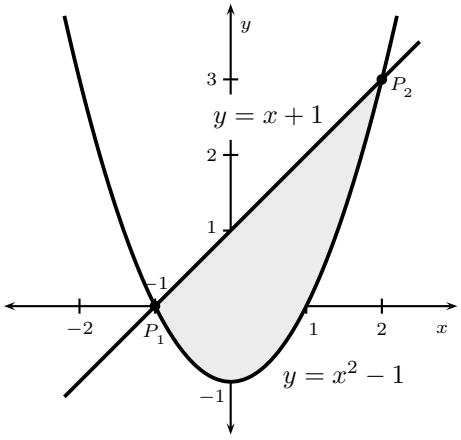
$$f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x + 1 = x^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(x-2) = 0$$

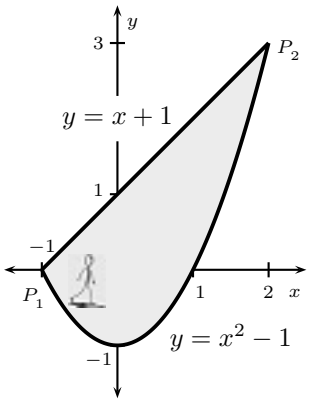
para resolver la ecuación de segundo grado aplicamos la resolvente con $a = 1$, $b = -1$ y $c = -2$,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\[2ex] \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1, \end{cases}$$

luego, las coordenadas x de intersección son $x = -1$ y $x = 2$, las coordenadas y de los puntos de intersección se obtienen sustituyendo en una de las funciones involucradas.

- Para $x = -1$, se tiene
$$y = (-1) + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad P_1(-1, 0).$$
- Para $x = 2$, se tiene
$$y = (2) + 1 = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad P_2(2, 3).$$





Entonces,

$$A = \int_{-1}^{2} \left((x+1) - \left(x^2 - 1\right)\right)\, dx = \int_{-1}^{2} \left(x - x^2 + 2\right)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right|_{-1}^{2}$$

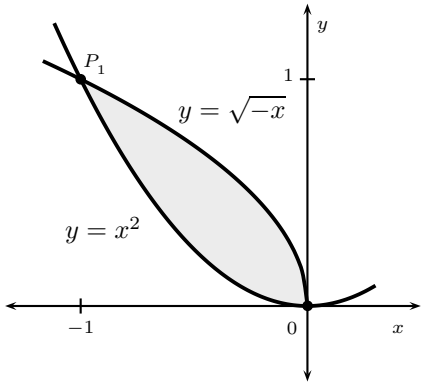
$$= \left(\overbrace{\frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} + 2(2)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2},$$

por lo tanto, $A = \dfrac{9}{2}$. ★

Ejemplo 108 *: Hallar el área de la región limitada por* $f(x) = \sqrt{-x}$ *y* $g(x) = x^2$.

Solución : La rerpesentación gráfica de la región

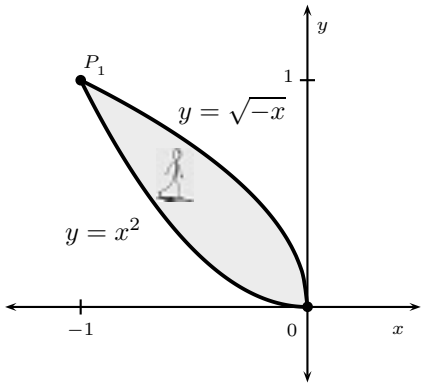
En primer lugar, observemos que el dominio de la función $f(x) = \sqrt{-x}$ es $(-\infty, 0]$ y la gráfica de f es la gráfica de la función básica raíz cuadrada, reflejada respecto al eje y, mientras que, la gráfica de la función $g(x) = x^2$ es conocida.



Buscamos los puntos de intersección entre las curvas

$$\sqrt{-x} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad -x = x^4 \quad \Longrightarrow \quad x^4 + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = 0$$

luego, las coordenadas x de intersección son $x = -1$ y $x = 0$. Entonces



$$A = \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{-x} - x^2\right)\, dx = \left(-\frac{2}{3}\sqrt{(-x)^3} - \frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0}$$

$$= \left(\overbrace{-\frac{2}{3}\sqrt{(-(0))^3} - \frac{(0)^3}{3}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{-\frac{2}{3}\sqrt{(-(-1))^3} - \frac{(-1)^3}{3}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) = -\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

por lo tanto, $A = \dfrac{1}{3}$. ★

Ejemplo 109 *: Hallar el área de la región limitada por* $y \geq x^2 - x - 2$, $y \leq \sqrt{2x+2}$ *y* $y \leq 4 - 2x$.

Solución : Realizamos la representación gráfica de la región.

Observemos que la función $y = x^2 - x - 2$, se puede escribir, completando cuadrado, como

$$y = x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

que es la gráfica de la función básica $y = x^2$, con una traslación horizontal, a la izquierda, de $\frac{1}{2}$ unidades y una traslación vertical, hacia abajo, de $\frac{9}{4}$ unidades.

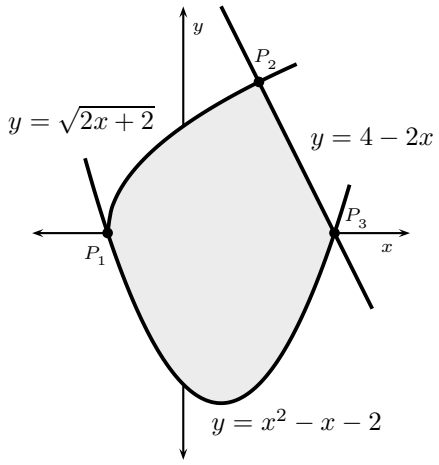
Por otra parte, la función $y = \sqrt{2x+2}$, se puede escribir como

$$y = \sqrt{2x+2} = \sqrt{2\,(x+1)} = \sqrt{2}\,\sqrt{x+1},$$

así, la gráfica de de $y = \sqrt{2x+2}$ corresponde a la gráfica de la función básica $g\,(x) = \sqrt{x}$ trasladada, horizontalmente, una unidad a la izquierda y dilatada en $\sqrt{2}$ unidades.

Por último, la función $y = 4 - 2x$ es una recta de pendiente $m = -2$ y punto de corte con el eje de las ordenadas igual a $(0, 4)$,

Así, la representación gráfica de la región es



Hallamos los puntos de intersección entre las curvas

- Funciones $y = x^2 - x - 2$ y $y = \sqrt{2x+2}$. Puesto que, la función $y = \sqrt{2x+2}$ tiene sentido si

$$2x + 2 \geq 0, \qquad \text{entonces} \qquad x \geq -1,$$

se tiene que, el dominio de la función es $[-1, +\infty)$.

Igualamos las curvas y resolvemos. Elevamos al cuadrado a ambos lados de la igualdad,

$$x^2 - x - 2 = \sqrt{2x+2} \quad \Longrightarrow \quad \left(x^2 - x - 2\right)^2 = \left(\sqrt{2x+2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \left(x^2 - x - 2\right)^2 = 2x + 2$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x^2 - 1 - x - 1\right)^2 = 2\,(x+1) \quad \Longrightarrow \quad \left((x-1)\,(x+1) - (x+1)\right)^2 = 2\,(x+1)$$

$$\Longrightarrow \quad \left((x+1)\,((x-1) - 1)\right)^2 = 2\,(x+1) \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^2\,(x-2)^2 = 2\,(x+1)$$

$$\Longrightarrow \quad (x+1)^2\,(x-2)^2 - 2\,(x+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)\left((x+1)\,(x-2)^2 - 2\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (x+1)\left(x^3 - 3x^2 + 2\right) = 0$$

de aquí, se tiene que

$$x + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -1,$$

o

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x-1)\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x-1=0 \\ x-1-\sqrt{3}=0 \\ x-1+\sqrt{3}=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Así, tenemos cuatro posibles soluciones,

$$x=-1, \qquad x=1, \qquad x=1-\sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad x=1+\sqrt{3},$$

de las cuales una o máximo dos son las verdaderas soluciones de la ecuación

$$x^2 - x - 2 = \sqrt{2x+2}, \qquad \text{que es equivalente a} \qquad x^2 - x - 2 - \sqrt{2x+2} = 0,$$

para conocer, cuales de estos cuatro valores son solución de la ecuación debemos verificar cuales de esos valores satisfacen la igualdad

♠ Para $x=-1$. Así, se tiene

$$(-1)^2 - (-1) - 2 - \sqrt{2(-1)+2} = 1 + 1 - 2 - \sqrt{-2+2} = 0 - 0 = 0,$$

luego, **si** se satisface la igualdad, por lo tanto, $x=-1$, **si** es solución de la ecuación y, por ende, es punto de intersección de las curvas y tiene como ordenada

$$y = \sqrt{2(-1)+2} = \sqrt{-2+2} = \sqrt{0} = 0,$$

entonces el punto de intersección tiene coordenadas $(1,0)$.

♠ Para $x=1$. Así, se tiene

$$(1)^2 - (1) - 2 - \sqrt{2(1)+2} = 1 - 1 - 2 - \sqrt{2+2} = -2 - \sqrt{4} = -2 - 2 = -4 \neq 0,$$

luego, **no** se satisface la igualdad, por lo tanto, $x=1$, **no** es solución de la ecuación y, por ende, **no** es punto de intersección de las curvas.

♠ Para $x=1-\sqrt{3}$. Así, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(1-\sqrt{3}\right)^2 - \left(1-\sqrt{3}\right) - 2 - \sqrt{2\left(1-\sqrt{3}\right)+2} &= 1 - 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1 + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2-2\sqrt{3}+2} \\
&= -\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 1 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right), \\
&= \frac{\left(1 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)\right)\left(1 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)\right)}{1 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)} \\
&= \frac{1 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{1 - \left(\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2\right)}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1 - \left(3 + 2\sqrt{3}\sqrt{4-2\sqrt{3}} + 4 - 2\sqrt{3}\right)}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{1 - \left(3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)} + 4 - 2\sqrt{3}\right)}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1 - \left(7 + 2\sqrt{6}\,\sqrt{2-\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\right)}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{-6 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}\,\sqrt{2-\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}} \neq 0
\end{aligned}$$

luego, **no** se satisface la igualdad, por lo tanto, $x = 1 - \sqrt{3}$, **no** es solución de la ecuación y, por ende, **no** es punto de intersección de las curvas.

♠ Para $x = 1 + \sqrt{3}$. Así, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \left(1+\sqrt{3}\right) - 2 - \sqrt{2\left(1+\sqrt{3}\right)+2} &= 1 + 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2+2\sqrt{3}+2} \\
&= \sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \left(1+\sqrt{3}\right) - \sqrt{4+2\sqrt{3}}, \\
&= \frac{\left(\left(1+\sqrt{3}\right) - \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)\left(\left(1+\sqrt{3}\right) + \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right) + \sqrt{4+2\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \frac{1+2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(4+2\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1+2\sqrt{3}+3-4-2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \frac{0}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = 0
\end{aligned}$$

luego, **si** se satisface la igualdad, por lo tanto, $x = 1 + \sqrt{3}$, **si** es solución de la ecuación y, por ende, es punto de intersección de las curvas y tiene como ordenada

$$y = \sqrt{2\left(1+\sqrt{3}\right)+2} = \sqrt{2+2\sqrt{3}+2} = \sqrt{4+2\sqrt{3}},$$

entonces el punto de intersección tiene coordenadas $\left(1+\sqrt{3}, \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)$.

Concluimos que, el punto P_1 es $(-1, 0)$.

- Funciones $y = \sqrt{2x+2}$ y $y = 4 - 2x$. Igualamos las curvas y resolvemos. Elevamos al cuadrado

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+2} = 4 - 2x \quad &\Longrightarrow \quad \left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = (4-2x)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 2 = 16 - 16x + 4x^2 \\
&\Longrightarrow \quad x + 1 = 8 - 8x + 2x^2 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 9x + 7 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (x-1)(2x-7) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

Así, tenemos dos posibles soluciones,

$$x = 1 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{7}{2},$$

de las cuales una es la verdadera solución de la ecuación

$$\sqrt{2x+2} = 4 - 2x, \qquad \text{que es equivalente a} \qquad \sqrt{2x+2} - 4 + 2x = 0,$$

para conocer, cual de estos dos valores es solución de la ecuación debemos verificar cual de esos valores satisface la igualdad

♠ Para $x = 1$. Así, se tiene

$$\sqrt{2(1)+2} - 4 + 2(1) = \sqrt{4} - 4 + 2 = 2 - 4 + 2 = 0$$

luego, **si** se satisface la igualdad, por lo tanto, $x = 1$, **si** es solución de la ecuación y, por ende, es punto de intersección de las curvas y tiene como ordenada

$$y = \sqrt{2(1)+2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2,$$

entonces el punto de intersección tiene coordenadas $(1, 2)$.

♠ Para $x = \dfrac{2}{7}$. Así, se tiene

$$\sqrt{2\left(\frac{7}{2}\right)+2} - 4 + 2\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{7+2} - 4 + 7 = \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6 \neq 0,$$

luego, **no** se satisface la igualdad, por lo tanto, $x = \dfrac{2}{7}$, **no** es solución de la ecuación y, por ende, **no** es punto de intersección de las curvas.

Concluimos que, el punto P_2 es $(1, 2)$.

- Funciones $y = \sqrt{2x+2}$ y $y = 4 - 2x$. Igualamos las curvas y resolvemos.

$$x^2 - x - 2 = 4 - 2x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x - 2 - 4 + 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (x-2)(x+3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -3 \text{ y } x = 2.$$

Así, los puntos de intersección son

♠ Para $x = -3$, su ordenada en el origen es

$$y = 4 - 2(-3) = 4 + 6 = 10,$$

entonces el punto de intersección tiene coordenadas $(-3, 10)$.

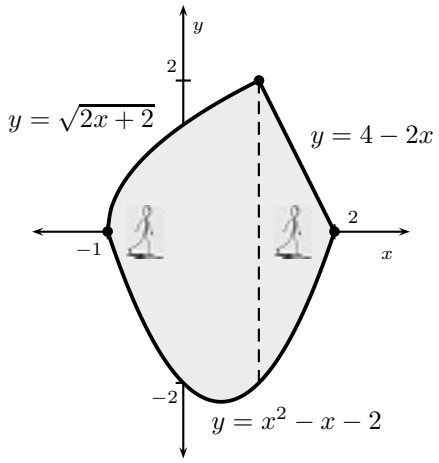
♠ Para $x = 2$, su ordenada en el origen es

$$y = 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0,$$

entonces el punto de intersección tiene coordenadas $(2, 0)$.

Concluimos que, el punto P_3 es $(2, 0)$.

Entonces,



por lo que, el área viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2x+2} - \left(x^2 - x - 2\right)\right) dx + \int_{1}^{2} \left(4 - 2x - \left(x^2 - x - 2\right)\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{2x+2}\, dx - \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x - 2\right) dx + \int_{1}^{2} \left(4 - 2x - x^2 + x + 2\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{2x+2}\, dx - \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x - 2\right) dx + \int_{1}^{2} \left(6 - x - x^2\right) dx, \end{aligned}$$

donde

- Calculamos la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{2x+2}\, dx$: Se propone el cambio de variable

$$u = 2x+2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad \frac{du}{2} = dx,$$

cambiamos los límites de integración,

$$\text{Si} \quad x=-1 \quad \text{entonces,} \quad u = 2(-1)+2 \quad \Longrightarrow \quad u=0$$

$$\text{Si} \quad x=1 \quad \text{entonces,} \quad u = 2(1)+2 \quad \Longrightarrow \quad u=4,$$

la integral nos queda,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2x+2}\, dx = \int_{0}^{4} \sqrt{u}\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{4} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right|_{0}^{4} = \frac{1}{3}\left(u^{3/2}\right|_{0}^{4}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overbrace{(4)^{3/2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}} - \overbrace{(0)^{3/2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) = \frac{1}{3}\left(2^2\right)^{3/2} = \frac{1}{3}\left(2^3\right) = \frac{8}{3},$$

de aquí,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2x+2}\, dx = \frac{8}{3}.$$

- Calculamos la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2-x-2\right) dx$. Por linealidad

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2-x-2\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right|_{-1}^{1} = \left(\overbrace{\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} - 2(1)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2}{3} - 4 = -\frac{10}{3},$$

de aquí,

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2-x-2\right) dx = -\frac{10}{3}.$$

- Calculamos la integral $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(6-x-x^2\right) dx$. Por linealidad

$$\int_{1}^{2} \left(6-x-x^2\right) dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_{1}^{2} = \left(\overbrace{6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{6(1) - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right)$$

$$= \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 10 - \frac{8}{3} - 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 4 - \frac{7}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6},$$

de aquí,

$$\int_1^2 \left(6 - x - x^2\right) dx = \frac{13}{6}.$$

Entonces, el área de la región es

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{2x+2}\, dx - \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x - 2\right) dx + \int_1^2 \left(6 - x - x^2\right) dx = \frac{8}{3} - \left(-\frac{10}{3}\right) + \frac{13}{6} = \frac{49}{6},$$

por lo tanto, $A = \dfrac{49}{6}$. ★

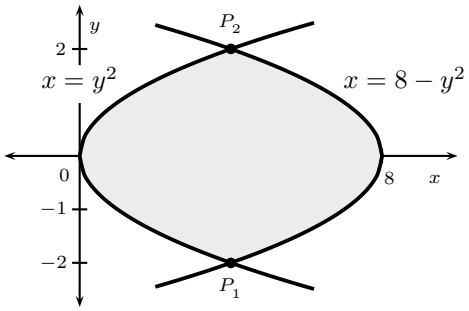
Ejemplo 110 *: Hallar el área la región limitada por las curvas* $x = 8 - y^2$, $x = y^2$.

Solución : Representación gráfica de la región:

Observemos que la función $x = y^2$, es la parábola con dominio en el eje y.

Por otra parte, la función $x = 8 - y^2$, es la gráfica de la función básica $x = y^2$, reflejada respecto al eje y y una traslación vertical hacia arriba respecto a su eje dominio y, (respecto al eje x, sería hacia la derecha), de 8 unidades.

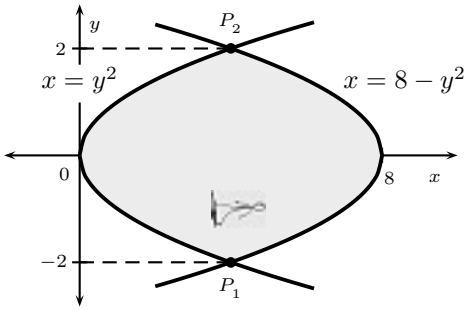
Así, la representación gráfica de la región es



Buscamos los puntos de intersección entre las curvas, para ello igualamos la curvas y resolvemos

$$8 - y^2 = y^2 \quad \Longrightarrow \quad 8 = 2y^2 \quad \Longrightarrow \quad 4 = y^2 \quad \Longrightarrow \quad |y| = \sqrt{4} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm 2,$$

entonces, si nos desplazamos respecto al eje y,



el área se expresa como

$$A = \int_{-2}^{2} \left(\left(8 - y^2\right) - \left(y^2\right)\right)\, dy,$$

calculamos el área

$$A = \int_{-2}^{2} \left(\left(8 - y^2\right) - \left(y^2\right) \right) \, dy = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2y^2\right) \, dy = \left(8y - 2\,\frac{y^3}{3} \right|_{-2}^{2}$$

$$= \left(\overbrace{8\,(2) - 2\,\frac{(2)^3}{3}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}} \right) - \left(\overbrace{8\,(-2) - 2\,\frac{(-2)^3}{3}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}} \right) = \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = 32 - \frac{16}{3} = \frac{80}{3},$$

por lo tanto, $A = \dfrac{80}{3}$. ★

Ejemplo 111 *: Hallar el área de la región limitada por* $x = 2 - y^2$ *y* $x = |y|$.

Solución : Buscamos los puntos de intersección entre las curvas. Por definición de valor absoluto, se tiene que

$$|y| = \begin{cases} y & \text{si} \quad y \geq 0 \\ -y & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

entonces, estudiamos dos casos

- Si $y \geq 0$, se tiene

$$2 - y^2 = y \quad \Longrightarrow \quad y^2 + y - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (y-1)\,(y+2) = 0,$$

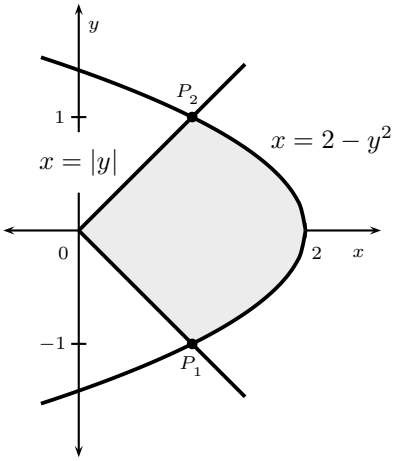
  luego, las coordenadas y de intersección son $y = 1$ y $y = -2$, como $y \geq 0$, concluimos que $y = 1$.

- Si $y < 0$, se tiene

$$2 - y^2 = -y \quad \Longrightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (y+1)\,(y-2) = 0,$$

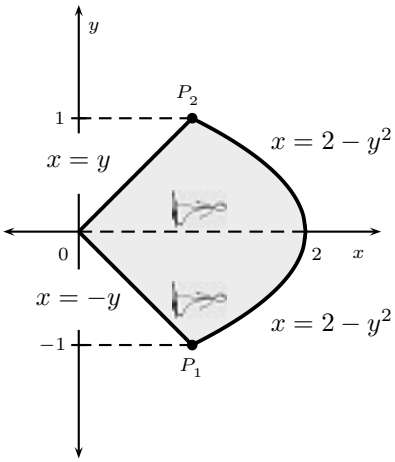
  luego, las coordenadas y de intersección son $y = -1$ y $y = 2$, como $y < 0$, concluimos que $y = -1$.

La representación gráfica de la región es



Así, se desea encontrar el área de la región limitada por las curvas $x = 2 - y^2$ y $x = |y|$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Si nos desplazamos sobre el eje y, a lo largo del intervalo cerrado $[-1,1]$, observamos que la región se divide en dos subregiones, por lo que, el área de la región es la suma de las áreas de estas dos subregiones.



por lo que el área viene dada por

$$A = \int_{-1}^{1} \left(2 - y^2 - |y|\right)\ dy = \int_{-1}^{0} \left(\left(2 - y^2\right) - (-y)\right)\ dy + \int_{0}^{1} \left(\left(2 - y^2\right) - (y)\right)\ dy,$$

donde,

$$\int_{-1}^{0} \left(\left(2 - y^2\right) - (-y)\right)\ dy = \int_{-1}^{0} \left(2 - y^2 + y\right)\ dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right|_{-1}^{0}$$

$$= \left(\overbrace{2\,(0) - \frac{(0)^3}{3} + \frac{(0)^2}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{2\,(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) = -\left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6},$$

aplicando el mismo procedimiento para la otra integral y se obtiene

$$\int_{0}^{1} \left(\left(2 - y^2\right) - (y)\right)\ dy = \int_{0}^{1} \left(2 - y^2 - y\right)\ dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right|_{0}^{1}$$

$$= \left(\overbrace{2\,(1) - \frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{2\,(0) - \frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^2}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6},$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

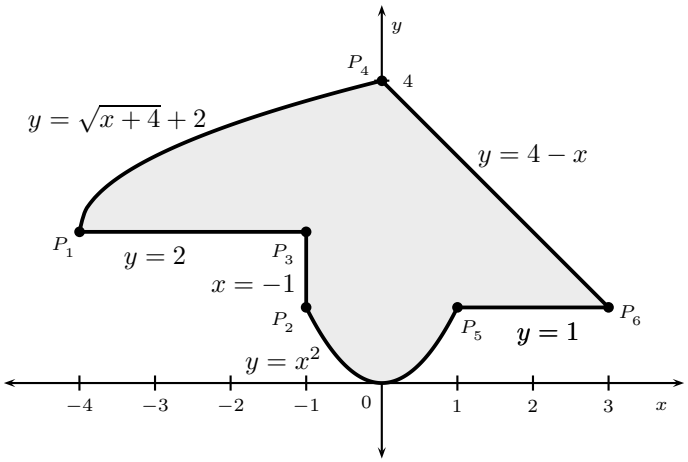
P.D. ¿Se puede usar lo simétrico de la región para facilitar los cálculos?. Explique.

P.D. Si calculamos el área desplazandonos a lo largo del eje x. ¿Se puede usar lo simétrico de la región para facilitar los cálculos?. Explique. ★

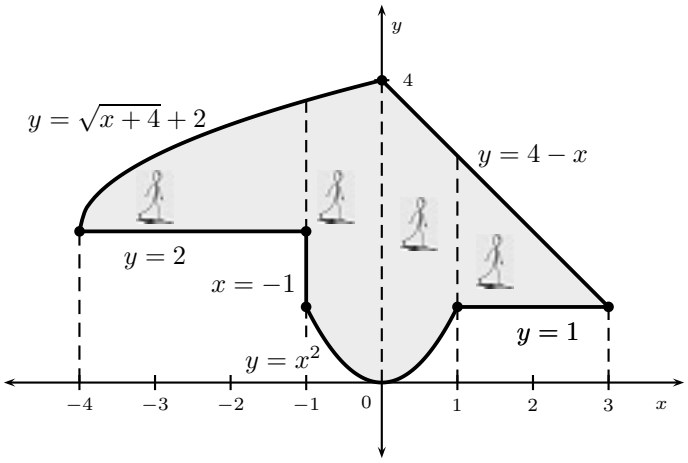
Ejemplo 112 *: Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas*

$$\begin{cases} y = x^2 & si \quad x \in [-1, 1] \\ y = 2 & si \quad x \in [-4, -1] \\ y = 1 & si \quad x \in [1, 3] \\ y = \sqrt{x+4} + 2 & si \quad x \in [-4, 0] \\ y = 4 - x & si \quad x \in [0, 3] \\ x = -1 & si \quad y \in [1, 2] \end{cases}$$

Solución : Graficamente, se tiene la siguiente región



Si nos desplazamos en el eje x, a lo largo del intervalo cerrado $[-4, 3]$, observamos que la región se divide en cuatro subregiones, por lo tanto, el área de la región es la suma de las áreas de estas cuatro subregiones.



Así, el área viene dada por

$$A = \int_{-4}^{-1} \left(\sqrt{x+4} + 2 - 2\right) dx + \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4} + 2 - x^2\right) dx + \int_{0}^{1} \left(4 - x - x^2\right) dx + \int_{1}^{3} (4 - x - 1)\, dx$$

$$= \int_{-4}^{-1} \sqrt{x+4}\, dx + \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4} + 2 - x^2\right) dx + \int_{0}^{1} \left(4 - x - x^2\right) dx + \int_{1}^{3} (3 - x)\, dx,$$

donde,

- Calculamos la integral $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \sqrt{x+4}\ dx$: Se propone el cambio de variable

$$u = x+4 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

cambiamos los límites de integración,

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x=-4 & \text{entonces,} & u=(-4)+4 & \Longrightarrow & u=0 \\ \text{Si} & x=-1 & \text{entonces,} & u=(-1)+4 & \Longrightarrow & u=3, \end{array}$$

la integral nos queda,

$$\int_{-4}^{-1} \sqrt{x+4}\ dx = \int_0^3 \sqrt{u}\ du = \left(\frac{2}{3}\ u^{3/2} \right|_0^3 = \frac{2}{3} \left(\overbrace{\sqrt{3^3}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite superior}}} - \overbrace{\sqrt{0^3}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite inferior}}} \right) = \frac{2}{3}\ 3\ \sqrt{3} = 2\ \sqrt{3}.$$

de aquí,

$$\int_{-4}^{-1} \sqrt{x+4}\ dx = 2\ \sqrt{3}.$$

- Calculamos la integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4}+2-x^2\right)\ dx$: Por linealidad de la integral definida, se tiene

$$\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4}+2-x^2\right)\ dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{x+4}\ dx + 2\int_{-1}^{0} dx - \int_{-1}^{0} x^2\ dx.$$

Para la primera integral del lado derecho de la igualdad, procedemos de la misma manera que el item anterior, se propone el mismo cambio de variable, lo que cambia son los límites de integración. Se propone el cambio de variable

$$u = x+4 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

cambiamos los límites de integración,

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x=-1 & \text{entonces,} & u=(-1)+4 & \Longrightarrow & u=3 \\ \text{Si} & x=0 & \text{entonces,} & u=(0)+4 & \Longrightarrow & u=4, \end{array}$$

la integral nos queda,

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x+4}\ dx = \int_3^4 \sqrt{u}\ du = \left(\frac{2}{3}\ u^{3/2} \right|_3^4 = \frac{2}{3} \left(\overbrace{\sqrt{4^3}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite superior}}} - \overbrace{\sqrt{3^3}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite inferior}}} \right) = \frac{2}{3}\ \left(8-3\ \sqrt{3}\right) = \frac{16}{3} - 2\ \sqrt{3}.$$

Por otra parte,

$$\int_{-1}^{0} dx = \left(x \right|_{-1}^{0} = \left(\overbrace{(0)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite superior}}} - \overbrace{(-1)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite inferior}}} \right) = 1,$$

por último,

$$\int_{-1}^{0} x^2\ dx = \left(\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}\ \left(\overbrace{(0)^3}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite superior}}} - \overbrace{(-1)^3}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite inferior}}}\right) = \frac{1}{3},$$

entonces,

$$\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4}+2-x^2\right)\ dx = \frac{16}{3} - 2\ \sqrt{3} + 2\,(1) - \frac{1}{3} = 7 - 2\ \sqrt{3},$$

Luego,

$$\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4}+2-x^2\right)\ dx = 7 - 2\ \sqrt{3}.$$

- Cálculo de la integral $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(4-x-x^2\right)\ dx$: Tenemos que

$$\int_{0}^{1} \left(4-x-x^2\right)\ dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} = \left(\overbrace{4\,(1) - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{4\,(0) - \frac{(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{3}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite inferior}}}\right) = \frac{19}{6}.$$

Luego,

$$\int_{0}^{1} \left(4-x-x^2\right)\ dx = \frac{19}{6}.$$

- Cálculo de la integral $\displaystyle\int_{1}^{3} (3-x)\ dx$: Tenemos que

$$\int_{1}^{3} (3-x)\ dx = \left(3x - \frac{x^2}{2}\right|_{1}^{3} = \left(\overbrace{3\,(3) - \frac{(3)^2}{2}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{3\,(1) - \frac{(1)^2}{2}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite inferior}}}\right) = \left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right) = 2.$$

Luego,

$$\int_{1}^{3} (3-x)\ dx = 2.$$

Finalmente,

$$A = \underbrace{\int_{-4}^{-1} \left(\sqrt{x+4}+2-2\right) dx}_{\boxed{2\ \sqrt{3}}} + \underbrace{\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4}+2-x^2\right) dx}_{\boxed{7-2\ \sqrt{3}}} + \underbrace{\int_{0}^{1} \left(4-x-x^2\right) dx}_{\boxed{\frac{19}{6}}} + \underbrace{\int_{1}^{3} (4-x-1)\, dx}_{\boxed{2}}$$

es decir,

$$A = 2\sqrt{3} + \left(7 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{19}{6} + 2 = \frac{73}{6}.$$

Por lo tanto, $\quad A = \dfrac{73}{6}.$ ★

Ejemplo 113 *: Hallar el área de la región limitada por las curvas* $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $x = 1$ *y los ejes coordenados.*

Solución : Obtenemos la gráfica de la función en el intervalo $[0, 1]$. Hallamos el valor de la función f en los extremos del intervalo

$$\text{Si} \quad x = 0, \quad \text{entonces} \quad y = (0)^3 + (0)^2 + 2(0) + 1 = 1, \quad \text{se tiene} \quad (0, 1)$$

$$\text{Si} \quad x = 1, \quad \text{entonces} \quad y = (1)^3 + (1)^2 + 2(1) + 1 = 5, \quad \text{se tiene} \quad (1, 5),$$

por lo tanto, la función f pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 5)$, además, la función $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ es creciente en $[0, 1]$, ya que

$$f'(x) = \left(x^3 + x^2 + 2x + 1\right)' = 3x^2 + 2x + 2 > 0,$$

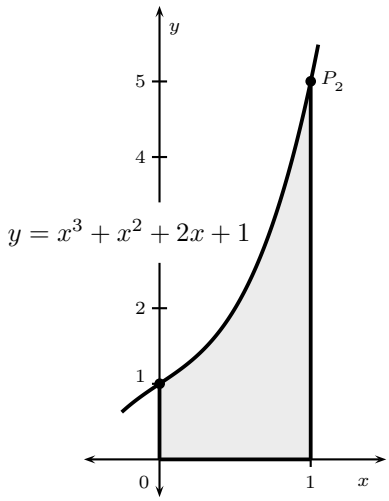
estudiamos su concavidad de la función en el intervalo $[0, 1]$, para ello volvemos a derivar

$$f''(x) = \left(3x^2 + 2x + 2\right)' = 6x + 2,$$

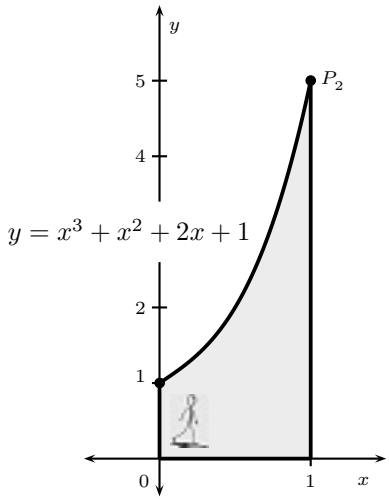
y se observa que si $x \in [0.1]$, entonces $f''(x) = 6x + 2 > 0$, luego, f concava hacia arriba en el intervalo.

Observe que el comportamiento de la función fuera del intervalo $[0, 1]$ no es de interés para la obtención del área de la región.

La gráfica de la región es



Nos desplazamos sobre el eje x, a lo largo del intervalo cerrado $[0, 1]$.



entonces, el área viene dada por

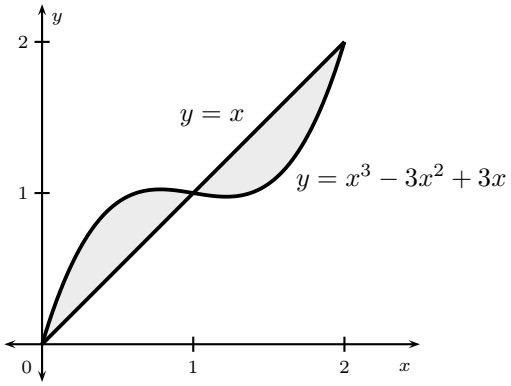
$$A = \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + 2x + 1\right)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^2}{2} + x\right|_0^1 = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x\right|_0^1$$

$$= \left(\overbrace{\frac{(1)^4}{4} + \frac{(1)^3}{3} + (1)^2 + (1)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(0)^4}{4} + \frac{(0)^3}{3} + (0)^2 + (0)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite inferior}}}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 2\right) = \frac{31}{12},$$

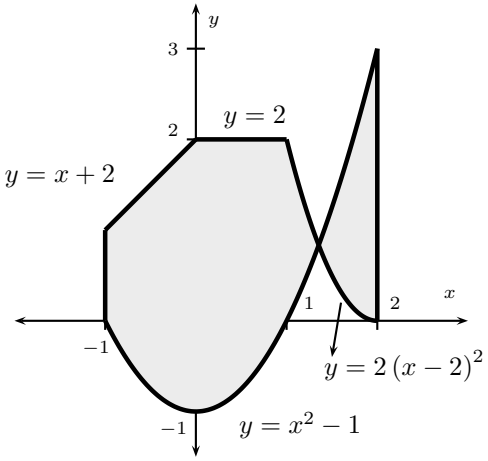
por lo tanto, $A = \dfrac{31}{12}$. ★

Ejercicios

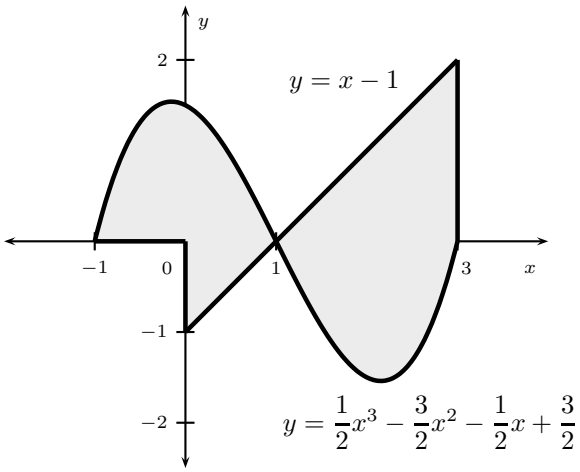
1. Hallar el área de la región dada en la gráfica



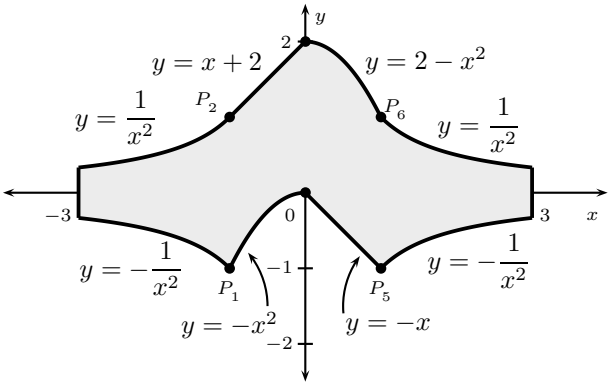
2. Hallar el área de la región dada en la gráfica



3. Hallar el área de la región dada en la gráfica



4. Hallar el área de la región dada en la gráfica



5. Dibuje la región limitada por las curvas dadas y calcule su área

1. $y = x^2, \quad y = x^4$
2. $y = x^4, \quad y = -x - 1, \quad x = -2, \quad x = 0$
3. $y = x, \quad y = x^3$
4. $x + y^2 = 0, \quad x = y^2 + 1, \quad y = 0, \quad y = 3$
5. $y = x^2 - 4x, \quad y = 2x$
6. $x = 3y, \quad x + y = 0, \quad 7x + 3y = 24$
7. $y = x, \quad y = x^2$
8. $y^2 = x, \quad y = x + 5, \quad y = -1, \quad y = 2$
9. $y = x^2, \quad y^2 = x$
10. $y = x^2 + 3, \quad y = x, \quad x = -1, \quad x = 1$
11. $y = \sqrt{x}, \quad y = x/2$
12. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen}(2x), \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
13. $y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3$
14. $y = x^2 + 2, \quad y = 2x + 5, \quad x = 0, \quad x = 6$
15. $y = x^4 - x^2, \quad y = 1 - x^2$
16. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2, \quad x = -3, \quad x = 0$
17. $x + y^2 = 2, \quad x + y = 0$
18. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = x + 4, \quad x = -3, \quad x = 2$
19. $y^2 = x, \quad x - 2y = 3$
20. $y = x^2 + 1, \quad y = 3 - x^2, \quad x = -2, \quad x = 2$
21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$
22. $y = |x|, \quad y = (x + 1)^2 - 7, \quad x = -4$
23. $y = 2x - x^2, \quad y = x^3$
24. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/2$
25. $x = 1 - y^4, \quad x = y^3 - y$
26. $y = \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$
27. $y = x^3, \quad x = y^3$
28. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen}(2x), \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
29. $y = x\sqrt{1 - x^2}, \quad y = x - x^3$
30. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos(2x), \quad x = 0, \quad x = \pi/4$
31. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 0$
32. $y = |x - 1|, \quad y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$
33. $y = 4 + 3x - x^2, \quad y = 0$
34. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen}(2x), \quad x = \pi/2, \quad x = \pi$
35. $y = \sqrt{x - 4}, \quad y = 0, \quad x = 8$
36. $x^2 + 2x + y = 0, \quad x + y + 2 = 0$
37. $x = y^4, \quad x = 2 - y^4$
38. $y = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad y = x^2 - x$
39. $x = 6y - y^2, \quad x = 0$
40. $y = \sqrt{x - 1}, \quad x - 3y + 1 = 0$

6. Encuentre el número b, tal que la recta $y = b$ divida la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de áreas iguales.

7. (a) Encuentre el número a, tal que la recta $x = a$ sea bisectriz del área bajo la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq 4$.
   (b) Encuentre el número b, tal que la recta $y = b$ sea bisectriz del área considerada en la parte (7a).

8. Calcule el área de la región R limitada por las curvas

$$y = |\operatorname{sen} x| \quad \text{en} \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad\qquad y = \left|\frac{8x}{\pi}\right| - 3.$$

9. Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ y = 2 & \text{si} \quad x \in [-4, -1] \\ y = 1 & \text{si} \quad x \in [1, 3] \\ y = \sqrt{x+4} + 2 & \text{si} \quad x \in [-4, 0] \\ y = 4 - x & \text{si} \quad x \in [0, 3] \\ x = -1 & \text{si} \quad y \in [1, 2] \end{cases}$$

10. Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas

$$\begin{cases} x = |y-2| & \text{si} \quad |y-2| \leq 2 \\ y = 1 & \text{si} \quad x \in [2, 5] \\ y = 3 & \text{si} \quad x \in [2, 5] \\ x = 2 & \text{si} \quad y \in [0, 1] \bigcup [3, 4] \\ x = 5 & \text{si} \quad y \in [1, 3] \end{cases}$$

11. Calcule el área de la región R limitada por las curvas

$$y = 1 - 4(x-3)^2, \qquad\qquad y = 3 - |18 - 6x|.$$

12. Sea R la región limitada por las curvas de ecuación

$$y = (x-2)^2, \qquad y = -4\sqrt{\frac{2-x}{3}}, \qquad x + 1 = \frac{6}{13}|y-9|.$$

   a. Dibuje la región R.
   b. Calcular el área de la región R.

13. Considere la región R limitada por las curvas

$$|x+1| + |y| = 1, \qquad y = x^2 \qquad \text{y} \qquad x + y^2 + \frac{5}{4} = 0.$$

   a. Dibuje la región R.
   b. Calcular el área de la región R.

14. Halle el área comprendida entre las parábolas $x = y^2$ y $x = 3 - 2y^2$.

15. Demuestre, usando integrales, que el área de un triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(0,x)$ y $C(0,y)$ viene dada por

$$A = \frac{|xy|}{2}.$$

16. Encuentre, usando integrales, el área de un triángulo formado por los ejes x y y y la recta $y = x - 5$.

17. Hallar, usando integrales, el área del triángulo cuyos lados están definidos por las rectas

$$L_1 : 3x + y - 7 = 0, \qquad L_2 : x + 7y + 11 = 0 \qquad \text{y} \qquad L_3 : x - 3y + 1 = 0.$$

18. Hallar el área del triángulo cuyos lados están definidos por las rectas

$$x + 3y - 4 = 0, \qquad x + 7y + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 5y - 1 = 0.$$

19. Sea el triángulo $\triangle ABC$ de vértices $A(-3,5)$, $B(4,4)$ y $C(-2,-3)$. Hallar, usando integrales, el área del triángulo.

20. Dado el triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(3,-2)$ y $C(-4,-1)$, hallar, usando integrales, el área del triángulo.

21. Para el triángulo dado por los vértices $D(1,2)$, $E(4,7)$ y $F(8,4)$, determinar, usando integrales, el área del triángulo.

22. Calcular, usando integrales, el área del triángulo determinado por los puntos $A(1,1)$, $B(3,4)$ y $C(4,1)$.

23. Verificar, usando integrales, que $\dfrac{3|a|^3}{4}$ es el área del triángulo formado por las rectas

$$y = ax + a^2, \qquad ax + y + a^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4ax - 2y + a^2 = 0.$$

24. Sean los puntos $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(3,3)$, $D(3,0)$ y $E(5,4)$. Hallar, usando integrales, el área total de la figura geométrica formada por el cuadrado de vértices $ABCD$ y el triángulo de vértices CBE.

25. Hallar, usando integrales, el área del rombo $ABCD$, donde, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ y $D(-1,0)$.

26. Hallar, usando integrales, el área del trapecio formado por las rectas

$$2x + 3y + 2 = 0, \qquad x - 4y + 5 = 0, \qquad 2x + 3y - 4 = 0, \qquad \text{y} \qquad y + 1 = 0.$$

27. Considere la función $f(x) = x^3 - x$, definida en el intervalo cerrado $[0,2]$.
    (a) Calcular la integral definida de f en el intervalo $[0,2]$.
    (b) Hallar el área encerrada por la gráfica de la curva $f(x) = x^3 - x$, el eje x en $[0,2]$.
    (c) Compare los resultados obtenidos en los items 27a y 27b. ¿Son iguales?, En caso negativo, explique la razón porque no son valores iguales.

28. Hallar el área encerrada por el eje x y las curvas $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$ y el eje y.

29. Considere los puntos $A(-2,4)$ y $B(1,1)$ sobre la parábola $y = x^2$ y los puntos $C(1,s)$ y $D(-2,r)$ tales que el segmento $\overline{CD}$ es tangente a la parábola y paralelo a $\overline{AB}$. Hallar el área encerrada por los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$ y la parábola.

30. Hallar el área de la región limitada por $y \geq x^2 - x - 2$, $y \leq \sqrt{2x+2}$ y $y \leq 4 - 2x$.

31. Hallar el área encerrada por la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

32. Hallar el área encerrada por la por la curva cerrada $y^2 = x^2 - x^4$.

33. Hallar el área del recinto plano limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje x.

34. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = x^4 - 4x^2$.

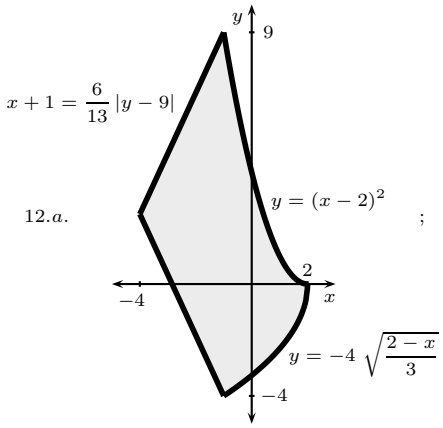
35. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^3 - x + 6$ e $y = 3x + 6$.

36. Hallar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $x = 1$ y los ejes coordenados.

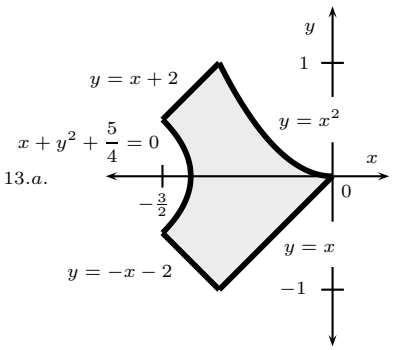
Respuestas: Ejercicios

1. $\frac{1}{2}$; 2. $\frac{11}{2}$; 3. $\frac{13}{2}$; 4. $\frac{11}{3}$; 5.1. $\frac{4}{15}$; 5.2. $\frac{32}{5}$; 5.3. $\frac{1}{2}$; 5.4. 21; 5.5. 36;
5.6. 12; 5.7. $\frac{1}{6}$; 5.8. $\frac{33}{2}$; 5.9. $\frac{1}{3}$; 5.10. $\frac{20}{3}$; 5.11. $\frac{4}{3}$; 5.12. $\frac{1}{2}$; 5.13. 4; 5.14. 36;
5.15. $\frac{8}{5}$; 5.16. $\frac{31}{6}$; 5.17. $\frac{9}{2}$; 5.18. $\frac{31}{6}$; 5.19. $\frac{32}{3}$; 5.20. 8; 5.21. $\frac{8}{3}$; 5.22. $\frac{58}{3}$; 5.23. $\frac{37}{12}$;
5.24. $2\sqrt{2} - 1$; 5.25. $\frac{8}{5}$; 5.26. $2 - \sqrt{2}$; 5.27. 1; 5.28. $\frac{1}{2}$; 5.29. $\frac{1}{6}$; 5.30. $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}$; 5.31. $\frac{4}{3}$;
5.32. $\frac{13}{3}$; 5.33. $\frac{125}{6}$; 5.34. $\frac{1}{2}$; 5.35. $\frac{16}{3}$; 5.36. $\frac{9}{2}$; 5.37. $\frac{16}{5}$; 5.38. $\frac{71}{6}$; 5.39. 36; 5.40. $\frac{1}{6}$;
6. $b = 2\sqrt[3]{2}$; 7.a. $a = \frac{8}{5}$; 7.b. $b = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$ ó $b = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{11}{8}$; 8. $\pi + 2$; 9. $\frac{73}{6}$; 10. 10;

11. 1; 12.a.



; 12.b. 59; 13.a.



;

13.b. $\frac{17}{12}$; 14. 4; 16. $\frac{25}{2}$; 17. 10; 18. $\frac{1}{8}$; 19. $\frac{55}{2}$; 20. 10; 21. $\frac{87}{34}\sqrt{7}$;
22. $\frac{9}{2}$; 24. $\frac{21}{2}$; 25. 2; 26. 6; 27.a. 2; 27.b. $\frac{3}{2}$; 28. $2 - \sqrt{2}$; 29. $\frac{9}{4}$;
30. $\frac{49}{6}$; 31. $\frac{3}{8}\pi$; 32. $\frac{4}{3}$; 33. $\frac{16}{3}$; 34. $\frac{96}{5}$; 35. 8; 36. $\frac{31}{12}$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Funciones Transcendentes.

Objetivos a cubrir — Código : MAT-CI.8

- Función logaritmo natural. Propiedades. Derivada e integración.
- Función exponencial natural. Propiedades. Derivada e integración.
- Función logaritmo y exponencial en base general. Propiedades. Derivada e integración.
- Funciones hiperbólicas. Identidades hiperbólicas.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 114 *: Considere la expresión* $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

1. *Obtenga el intervalo de definición para* f *(Dominio)*
2. *Hallar* $f(1)$.
3. *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* f.
4. *Hallar los valores extremos de* f.
5. *Estudiar la concavidad de* f.
6. *Esbozar una gráfica para* f.

Solución :

1. Observemos que el integrando no está definido en cero, por lo tanto esta integral no existe para ningún intervalo que incluya al cero, luego, el intervalo de definición es $(0, \infty)$.

2. Se tiene que

$$f(1) = \underbrace{\int_1^1 \frac{1}{t}\, dt}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Propiedad de la integral } \int_a^a f(x)\, dx = 0}}} = 0$$

3. Derivamos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{1}{t}\, dt\right) \overset{\substack{\boxed{1^{\text{er}} \text{ Teorema Fundamental del Cálculo : integrando evaluado en el límite variable.}} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{x}$$

y observamos que, para todo $x \in (0, \infty)$, se tiene que $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, por lo tanto, la función f es siempre creciente.

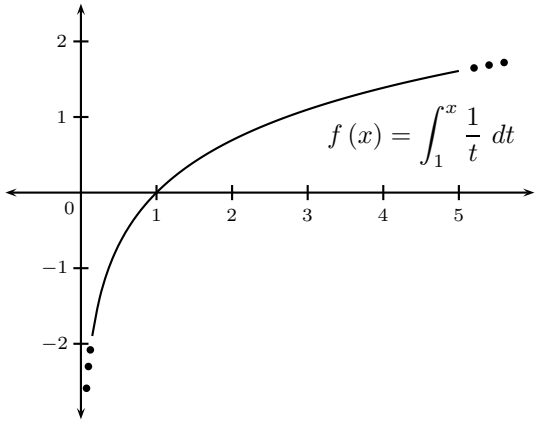
4. Por ser una función monótona creciente, no tiene valores extremos.

5. Se calcula la segunda derivada de f y se estudia su signo, derivamos

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},$$

y para todo $x \in (0, \infty)$, se tiene que $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, por lo tanto, la función f siempre es concava hacia abajo.

6. Un esbozo de la gráfica



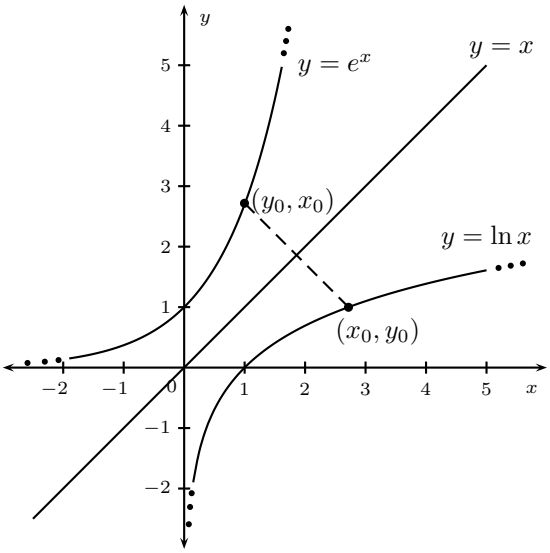
★

Ejemplo 115 *: Sea* $f(x) = \ln x$, *con* $x \in \text{Dom } f = (0, \infty)$.

1. *Demuestre que la función* f *admite inversa. Dicha inversa se denomina* ***función exponencial natural*** *y se denota por* $y = e^x$.
2. *Grafique la función* $f^{-1}(x) = e^x$.

Demostración : *1*. Por el item 3 del ejemplo 114, se concluye que la función $f(x) = \ln x$, admite inversa, por ser monótona creciente en todo su dominio.

2. Es conocido que, si $x \in \text{Dom } f$, entonces $x \in \text{Rgo } f^{-1}$, es decir, si el par ordenado (x_0, y_0) pertenece al gráfico de $y = f(x)$, entonces el par ordenado (y_0, x_0) pertenece al gráfico de f^{-1}, así,



★

Ejemplo 116 *: Demuestre que la primera derivada de la función* $f(x) = e^x$, *es* $f'(x) = e^x$.

Demostración : Es conocido el teorema que establece:

Teorema 1 *: Si* g *es una función diferenciable inyectiva con inversa* $f = g^{-1}$ *y* $g^{-1}(f(x)) \neq 0$, *entonces la función inversa es diferenciable en* x *y*

$$[f(x)]' = \left[g^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

La función $f(x) = e^x$ es diferenciable, ya que es la función inversa de $g(x) = \ln x$, la cual es una función diferenciable, además

$$[g(x)]' = [\ln x]' = \frac{1}{x},$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x,$$

luego,

$$[f(x)]' = \frac{1}{g'(f(x))} = e^x.$$

★

Ejemplo 117 *: Determine el dominio de la función* $f(x) = \dfrac{\ln\left(1-x^2\right) - \ln(x+5)}{\sqrt{x} - x^2}$.

Solución : Tenemos que

$\ln(\cdot)$ tiene sentido si $(\cdot) > 0$, $\sqrt{(\cdot)}$ tiene sentido si $(\cdot) \geq 0$, $\dfrac{1}{(\cdot)}$ tiene sentido si $(\cdot) \neq 0$,

por lo tanto,

- Para $\ln(x+5)$, tenemos que $x + 5 > 0 \implies x > -5 \implies x \in (-5, \infty)$.
- Para $\ln\left(1-x^2\right)$, tenemos que $1 - x^2 > 0 \implies (1-x)(1+x) > 0$.

  Estudiamos el signo de la expresión

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$1+x$	$-$	$+$	$+$
$(1-x)(x+1)$	$-$	$+$	$-$

  por lo tanto,

$$x \in (-1, 1)$$

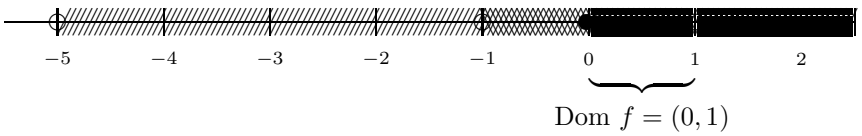
- Para $\sqrt{x}$, tenemos que $x \geq 0 \implies x \in [0, \infty)$.
- Para $\dfrac{1}{\sqrt{x} - x^2}$, observemos que resolver la no igualdad $\sqrt{x} - x^2 \neq 0$ es equivalente a resolver la igualdad $\sqrt{x} - x^2 = 0$ y obtener los valores x que sean soluciones de la igualdad y dichos valores excluirlos del conjunto de definición. Resolvemos la igualdad

$$\sqrt{x} - x^2 = 0 \implies \sqrt{x} = x^2 \implies \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(x^2\right)^2 \implies x = x^4 \implies x - x^4 = 0$$
$$x\left(1 - x^3\right) = 0 \implies x(1-x)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 1,$$

  luego, la función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - x^2}$ tiene sentido si $x \in (0, \infty) - \{1\}$.

Entonces, el dominio de f es

$$\text{Dom } f = (-5, \infty) \bigcap (-1, 1) \bigcap [0, \infty) \bigcap (0, \infty) - \{1\} = (0, 1) \implies \text{Dom } f = (0, 1).$$



★

Ejemplo 118 *: Determine el dominio de la función* $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{\ln x - 1}}{e^x - \ln x}$.

Solución : Tenemos que

$\sqrt[4]{(\cdot)}$ tiene sentido si $(\cdot) \geq 0$, $\ln(\cdot)$ tiene sentido si $(\cdot) > 0$, $\dfrac{1}{(\cdot)}$ tiene sentido si $(\cdot) \neq 0$,

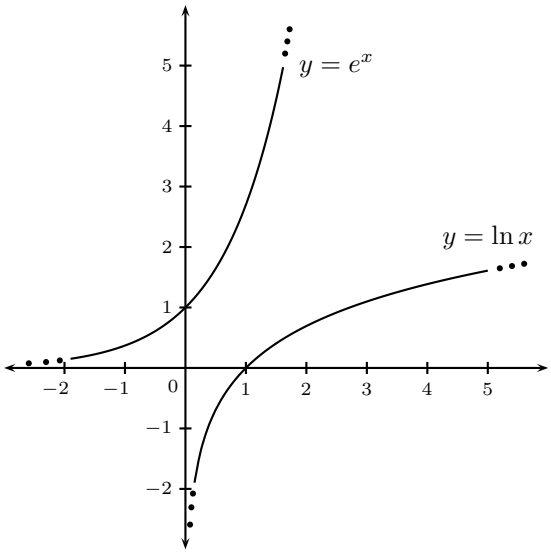
por lo tanto,

- Para $\sqrt[4]{\ln x - 1}$, resolvemos la desigualdad $\ln x - 1 \geq 0 \implies \ln x \geq 1$, para despejar x aplicamos la función inversa de la función logaritmo natural, es decir, la función exponencial natural, por ser la función exponencial natural creciente, la desigualdad se mantiene, así,

$$e^{\ln x} \geq e^1 \implies x \geq e \implies x \in [e, \infty).$$

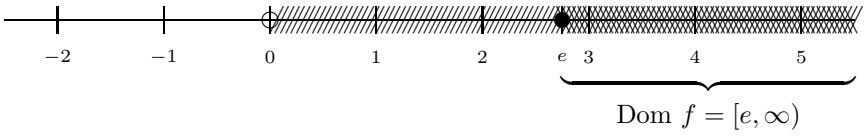
- Para $\ln x$, tenemos que $x > 0 \implies x \in (0, \infty)$.

- Para $\dfrac{1}{e^x - \ln x}$, observemos que resolver la no igualdad $e^x - \ln x \neq 0$ es equivalente a buscar los valores de x donde la función exponencial natural y la función logaritmo natural sean iguales, y dichos valores excluirlos del conjunto de definición, pero es conocido que dichas funciones no tienen puntos en común, así, que la expresión $\dfrac{1}{e^x - \ln x}$ tiene sentido para todo x en $(0, \infty)$.



Luego, el dominio de f es

$$\text{Dom } f = [e, \infty) \bigcap (0, \infty) = [e, \infty).$$



★

Ejemplo 119 *: Hallar el dominio de las siguientes funciones*

a. $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right) + \ln\left(x^3 - x\right)$ *b.* $f(x) = \ln\left(\left(x^2 - x - 6\right)\left(x^3 - x\right)\right)$

c. $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right) - \ln\left(x^3 - x\right)$ *d.* $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 - x}\right)$.

Solución : *a.* **Para la función** $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right) + \ln\left(x^3 - x\right)$. Puesto que, la función f es la suma de dos funciones logaritmo naturales,

$$f_1(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right) \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \ln\left(x^3 - x\right),$$

entonces,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2.$$

- Para f_1 : La función f_1 tiene sentido si

$$x^2 - x - 6 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x-3)(x+2) > 0,$$

estudiamos el signo de la expresión

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

por lo tanto,

$$\text{Dom } f_1 : (-\infty, -2) \bigcup (3, \infty)$$

- Para f_2 : La función f_2 tiene sentido si

$$x^3 - x > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x\left(x^2 - 1\right) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(x-1)(x+1) > 0,$$

estudiamos el signo de la expresión,

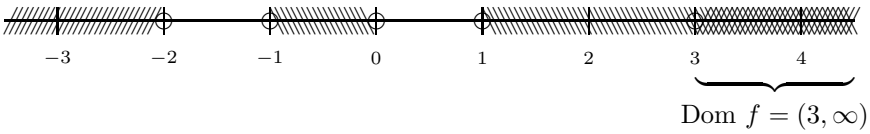
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x(x-1)(x+1)$	$-$	$+$	$-$	$+$

por lo tanto,

$$\text{Dom } f_2 : (-1, 0) \bigcup (1, \infty).$$

Luego, el dominio de la función f, es

$$\text{Dom } f = \Big((-\infty, -2) \bigcup (3, \infty) \Big) \bigcap \Big((-1, 0) \bigcup (1, \infty) \Big) = (3, \infty).$$



b. **Para la función** $f(x) = \ln\left(\left(x^2 - x - 6\right)\left(x^3 - x\right)\right)$. Es conocida la propiedad de los logaritmos

$$\textbf{Propiedad I :} \qquad \ln a + \ln b = \ln(ab),$$

así, que uno estaría tentado a sugerir que el dominio de esta función, $f(x) = \ln\left(\left(x^2 - x - 6\right)\left(x^3 - x\right)\right)$ es el mismo que el de la función de la parte $a.$, $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right) + \ln\left(x^3 - x\right)$, pero esto no es necesariamente cierto, ya que la **propiedad I** es válida solo cuando los términos a y b sean positivos.

Buscamos el domino de la función $f(x) = \ln\left(\left(x^2 - x - 6\right)\left(x^3 - x\right)\right)$.

La función f tiene sentido si,

$$\left(x^2 - x - 6\right)\left(x^3 - x\right) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(x+2)(x-3)(x-1)(x+1) > 0.$$

Estudiamos el signo de los factores,

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(1, \infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\left(x^2 - x - 6\right)\left(x^3 - x\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, el dominio de la función $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)\left(x^3 - x\right)$ es

$$\text{Dom } f : (-2, -1) \bigcup (0, 1) \bigcup (1, \infty).$$

c. **Para la función** $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right) - \ln\left(x^3 - x\right)$. Como la función f es la diferencia de dos funciones logaritmo naturales,

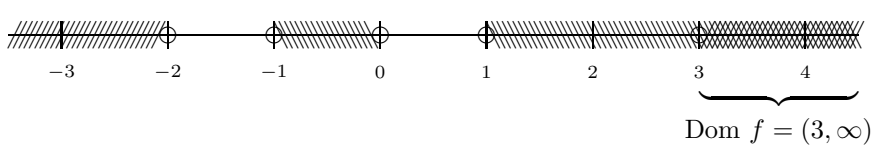
$$f_1(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right) \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \ln\left(x^3 - x\right),$$

entonces,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2,$$

por la parte $a.$, se tiene que

$$\text{Dom } f = \Big((-\infty, -2) \bigcup (3, \infty) \Big) \bigcap \Big((-1, 0) \bigcup (1, \infty) \Big) = (3, \infty)$$



d. **Para la función** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 - x}\right)$. Similarmente, a las funciones de la parte $a.$ y $b.$. Es conocida la propiedad de los logaritmos

$$\textbf{Propiedad II :} \qquad \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right),$$

así, que uno estaría tentado a sugerir que el dominio de esta función, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 - x}\right)$ es el mismo que el de la función de la parte $c.$, $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right) - \ln\left(x^3 - x\right)$, pero esto no es necesariamente cierto, ya que la **propiedad II** es válida solo cuando los términos a y b sean positivos.

Buscamos el domino de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 - x}\right)$.

La función f tiene sentido si

$$\textbf{Condición } 1 \text{ (Para } \ln(\cdot)): \qquad \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - x} > 0$$

$$\textbf{Condición } 2 \left(\text{Para } \frac{1}{(\cdot)}\right): \qquad x^3 - x \neq 0.$$

Observemos que al resolver la **condición** 1, resolvemos indirectamente la **condición** 2, ya que, en la solución de la **condición** 1 no están incluidos los valores que anulan al denominador, así, resolvemos $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 - x} > 0$, factorizamos numerador y denominador.

- Para el numerador:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \qquad \text{Raíces}: \quad x = -2, \quad x = 3.$$

- Para el denominador:

$$x^3 - x = x\left(x^2 - 1\right) = x(x-1)(x+1) \qquad \text{Raíces}: \quad x = 0, \quad x = -1, \quad x = 1,$$

así,

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^3 - x} > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)(x+1)} > 0.$$

Estudiamos el signo de los factores

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(1, \infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)(x+1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

la solución de la desigualdad es

$$x \in (-2, -1) \bigcup (0, 1) \bigcup (1, \infty),$$

que corresponde al dominio de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 - x}\right)$. ★

Ejemplo 120 *: Hallar el rango de la función* $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 6$.

Solución : Es conocido que, $e^{2x} = (e^x)^2$, así,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Completar cuadrado}\\ a(\cdot)^2 + b(\cdot) + c = a\left((\cdot) + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}\end{array}}$$

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x + 6 = (e^x)^2 - 2e^x + 6 \overset{\downarrow}{=} (e^x - 1)^2 + 5.$$

Buscamos el rango de la función de $f(x) = (e^x - 1)^2 + 5$.

$$\text{Dom } f : (-\infty, \infty) \quad \Longrightarrow \quad -\infty < x < \infty$$

$$\Big\downarrow \ \underset{\text{(la desigualdad se mantiene)}}{\text{Aplicamos } e^{(\cdot)}}$$

$$0 < e^x < \infty$$

$$\Big\downarrow \ \underset{\text{(la desigualdad se mantiene)}}{\text{Restamos } 1}$$

$$-1 < e^x - 1 < \infty$$

$$\overset{\text{Parte negativa}}{\swarrow} \qquad \overset{\text{Parte positiva}}{\searrow}$$

$$-1 < e^x - 1 < 0 \qquad\qquad 0 \leq e^x - 1 < \infty$$

$$\underset{\text{(la desigualdad cambia)}}{\text{Elevamos al cuadrado}} \Big\downarrow \qquad\qquad \Big\downarrow \ \underset{\text{(la desigualdad se mantiene)}}{\text{Elevamos al cuadrado}}$$

$$1 > (e^x - 1)^2 > 0 \qquad\qquad 0 \leq (e^x - 1)^2 < \infty$$

$$\searrow \qquad\qquad \swarrow \ \text{Entonces } (e^x - 1)^2 \in (0,1) \bigcup [0, \infty)$$

$$0 \leq (e^x - 1)^2 < \infty$$

$$\Big\downarrow \ \underset{\text{(la desigualdad se mantiene)}}{\text{Sumamos } 5}$$

$$5 \leq (e^x - 1)^2 + 5 < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Rgo } f : [5, \infty)$$

Por lo tanto, Rgo $f : [5, \infty)$. ★

Ejemplo 121 *: Hallar el rango de la función* $f(x) = \ln(3 - x) - \ln(1 + x)$.

Solución : En primer lugar, buscamos el dominio de f, puesto que, la función f es la diferencia de dos funciones logaritmo naturales,

$$f_1(x) = \ln(3 - x) \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \ln(1 + x),$$

entonces,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2.$$

- Para f_1 : La función f_1 tiene sentido si

$$3 - x > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 3 > x,$$

por lo tanto,

$$\text{Dom } f_1 : (-\infty, 3).$$

- Para f_2 : La función f_2 tiene sentido si

$$1 + x > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x > -1,$$

por lo tanto,

$$\text{Dom } f_2 : (-1, \infty).$$

Luego, el dominio de la función f, es

$$\text{Dom } f = (-\infty, 3) \bigcap (-1, \infty) = (-1, 3),$$

de aquí,

$$f(x) = \ln(3 - x) - \ln(1 + x) = \ln\left(\frac{3 - x}{1 + x}\right) = \ln\left(\frac{4}{1 + x} - 1\right).$$

Buscamos el rango de la función de $f(x) = (e^x - 1)^2 + 5$.

$$\text{Dom } f : (-1, 3) \quad \Longrightarrow \quad -1 < x < 3$$

$$\Big\downarrow \ \text{Sumamos } 1 \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$0 < x + 1 < 4$$

$$\Big\downarrow \ \text{Aplicamos } \tfrac{1}{(\cdot)} \ \text{(la desigualdad cambia)}$$

$$\boxed{\text{Es conocido que la aplicación } \tfrac{1}{x} \text{ tiende a infinito cuando } x \text{ tiende a cero por la derecha.}} \longrightarrow \infty > \frac{1}{x+1} > \frac{1}{4}$$

$$\Big\downarrow \ \text{Multiplicamos por } 4 \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$1 < \frac{4}{x+1} < \infty$$

$$\Big\downarrow \ \text{Restamos } 1 \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$0 < \frac{4}{x+1} - 1 < \infty$$

$$\Big\downarrow \ \text{Aplicamos } \ln(\cdot) \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$\boxed{\text{Es conocido que la aplicación } \ln x \text{ tiende a } -\infty \text{ cuando } x \text{ tiende a cero por la derecha.}} \longrightarrow -\infty < \ln\left(\frac{4}{x+1} - 1\right) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \text{Rgo } f : \mathbb{R}$$

★

Ejemplo 122 *: Resuelva la siguiente ecuación* $\ln(2x+1) = \ln\left(x^2 - 14\right)$.

Solución : En primer lugar, buscamos el conjunto de definición de la igualdad, el cual denotaremos por C_{def}, para ello interceptamos los dominios de las expresiones involucradas

- La expresión $\ln(2x+1)$ tiene sentido si $2x + 1 > 0 \implies x > -\frac{1}{2} \implies x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- La expresión $\ln\left(x^2 - 14\right)$ tiene sentido si

$$x^2 - 14 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \sqrt{14}\right)\left(x + \sqrt{14}\right) > 0,$$

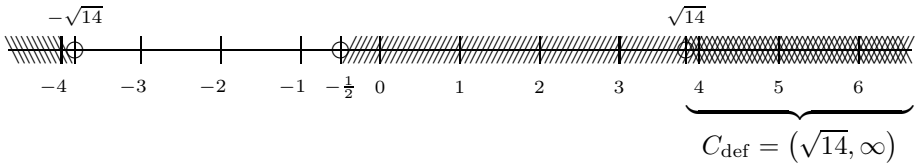
entonces,

	$\left(-\infty, -\sqrt{14}\right)$	$\left(-\sqrt{14}, \sqrt{14}\right)$	$\left(\sqrt{14}, \infty\right)$
$x - \sqrt{14}$	$-$	$-$	$+$
$x + \sqrt{14}$	$-$	$+$	$+$
$\left(x - \sqrt{14}\right)\left(x + \sqrt{14}\right)$	$+$	$-$	$+$

esto implica que, $x \in \left(-\infty, -\sqrt{14}\right) \bigcup \left(\sqrt{14}, \infty\right)$.

Por lo que, el conjunto de definición de la igualdad, C_{def}, viene dado por

$$C_{\text{def}} = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \bigcap \left\{\left(-\infty, -\sqrt{14}\right) \bigcup \left(\sqrt{14}, \infty\right)\right\} = \left(\sqrt{14}, \infty\right) \quad \Longrightarrow \quad C_{\text{def}} = \left(\sqrt{14}, \infty\right),$$



Resolvemos la igualdad para $x \in \left(\sqrt{14}, \infty\right)$, aplicamos la función inversa del logaritmo natural, la función exponencial natural,

$$\ln(2x+1) = \ln\left(x^2 - 14\right) \qquad \Longrightarrow \qquad e^{\ln(2x+1)} = e^{\ln\left(x^2-14\right)} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x+1 = x^2 - 14,$$

resolvemos esta última igualdad

$$2x+1 = x^2 - 14 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - 2x - 15 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x-5)(x+3) = 0,$$

de manera que las posibles soluciones son $x = 5$ y $x = -3$, de las cuales se debe descartar la última porque no está en el dominio de definición. Finalmente, la solución es $x = 5$. ★

Ejemplo 123 *: Resuelva la siguiente ecuación* $\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$.

Solución : Observemos que, el conjunto de definición de la igualdad, el cual denotamos por C_{def}, es el intervalo $(0, \infty)$

Resolvemos la igualdad para $x \in (0, \infty)$, entonces,

$$\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\ln x - 1)(\ln x - 2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \ln x - 1 = 0 \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = e \\ x = e^2 \end{cases}$$

las soluciones son $x = e$ y $x = e^2$, ya que, ambas están en el dominio de definición. ★

Ejemplo 124 *: Hallar y graficar el conjunto solución*

$$\ln\left(x^2 - 2\right) - \ln(x+4) \leq \ln(-x).$$

Solución : En primer lugar, buscamos el conjunto de definición de la desigualdad, el cual denotaremos por C_{def}, para ello interceptamos los dominios de las expresiones involucradas

- La expresión $\ln(-x)$ tiene sentido si $-x > 0 \implies x < 0 \implies x \in (-\infty, 0)$.
- La expresión $\ln(x+4)$ tiene sentido si $x + 4 > 0 \implies x > -4 \implies x \in (-4, \infty)$.
- La expresión $\ln\left(x^2 - 2\right)$ tiene sentido si

$$x^2 - 2 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) > 0,$$

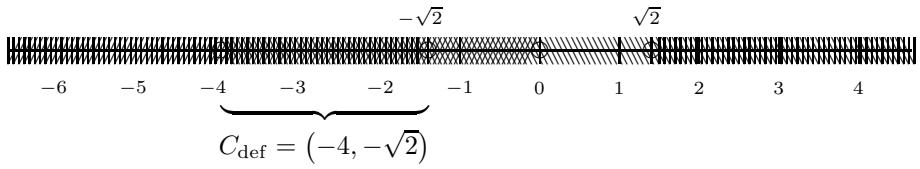
entonces,

	$\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, \infty\right)$
$x - \sqrt{2}$	$-$	$-$	$+$
$x + \sqrt{2}$	$-$	$+$	$+$
$\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$	$+$	$-$	$+$

esto implica que, $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \bigcup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$.

Por lo que, el conjunto de definición de la desigualdad, C_{def}, viene dado por

$$C_{\text{def}} = (-\infty, 0) \bigcap (-4, \infty) \bigcap \left\{ \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \bigcup \left(\sqrt{2}, \infty\right) \right\} = \left(-4, -\sqrt{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad C_{\text{def}} = \left(-4, -\sqrt{2}\right),$$



Resolvemos la desigualdad para $x \in \left(-4, -\sqrt{2}\right)$, por las propiedades del logaritmo natural, tenemos,

$$\ln\left(x^2 - 2\right) - \ln(x+4) \leq \ln(-x) \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(x^2 - 2\right) \leq \ln(-x) + \ln(x+4)$$
$$\Longrightarrow \quad \ln\left(x^2 - 2\right) \leq \ln\left(-x(x+4)\right),$$

aplicamos la función inversa del logaritmo natural, la función exponencial natural, por ser esta una función creciente la desigualdad se mantiene

$$\ln\left(x^2 - 2\right) \leq \ln\left(-x(x+4)\right) \quad \Longrightarrow \quad e^{\ln\left(x^2-2\right)} \leq e^{\ln(-x(x+4))} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2 \leq -x(x+4),$$

resolvemos esta última desigualdad

$$x^2 - 2 \leq -x(x+4) \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2 \leq -x^2 - 4x \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 + 4x - 2 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 \leq 0$$
$$\Longrightarrow \quad \left(x + \sqrt{2} + 1\right)\left(x - \sqrt{2} + 1\right) \leq 0,$$

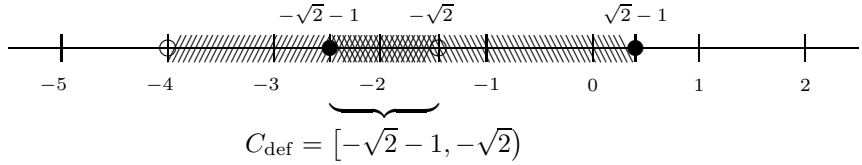
entonces,

	$\left(-\infty, -\sqrt{2} - 1\right)$	$\left(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1\right)$	$\left(\sqrt{2} - 1, \infty\right)$
$x + \sqrt{2} + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - \sqrt{2} - 1$	$-$	$-$	$+$
$\left(x + \sqrt{2} + 1\right)\left(x - \sqrt{2} + 1\right)$	$+$	$-$	$+$

esto implica que, $x \in \left[-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1\right]$.

Luego, la solución de la desigualdad $\ln\left(x^2 - 2\right) - \ln(x+4) \leq \ln(-x)$ viene dada por

$$x \in C_{\text{def}} \bigcap \left[-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1\right] \quad \Longrightarrow \quad x \in \left(-4, -\sqrt{2}\right) \bigcap \left[-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1\right] \quad \Longrightarrow \quad x \in \left[-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2}\right).$$



★

Ejemplo 125 *: Hallar el conjunto solución de*

$$\ln x - \ln(x+2) < \ln(x-1).$$

Solución : En primer lugar, buscamos el conjunto de definición, el cual denotaremos por C_{def}, de la desigualdad, para ello interceptamos los dominios de las expresiones involucradas

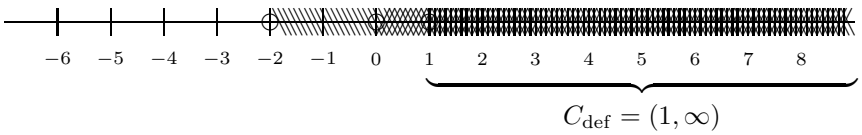
La expresión $\ln x$ tiene sentido si $x > 0 \implies x \in (0, \infty)$.

La expresión $\ln(x+2)$ tiene sentido si $x + 2 > 0 \implies x > -2 \implies x \in (-2, \infty)$.

La expresión $\ln(x-1)$ tiene sentido si $x - 1 > 0 \implies x > 1 \implies x \in (1, \infty)$,

así,

$$C_{\text{def}} = (0, \infty) \bigcap (-2, \infty) \bigcap (1, \infty) = (1, \infty) \quad \implies \quad C_{\text{def}} = (1, \infty),$$



por las propiedades del logaritmo natural, para todo $x \in (1, \infty)$, tenemos,

$$\ln x - \ln(x+2) < \ln(x-1) \quad \implies \quad \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) < \ln(x-1),$$

aplicamos la función inversa del logaritmo natural, la función exponencial natural, por ser esta una función creciente la desigualdad se mantiene

$$\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) < \ln(x-1) \quad \implies \quad e^{\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)} < e^{\ln(x-1)} \quad \implies \quad \frac{x}{x+2} < x - 1,$$

resolvemos esta última desigualdad

$$\frac{x}{x+2} < x - 1 \quad \implies \quad \frac{x}{x+2} - (x-1) < 0 \quad \implies \quad \frac{x - (x-1)(x+2)}{x+2} < 0 \quad \implies \quad \frac{2 - x^2}{x+2} < 0$$

$$\implies \quad \frac{\left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right)}{x+2} < 0,$$

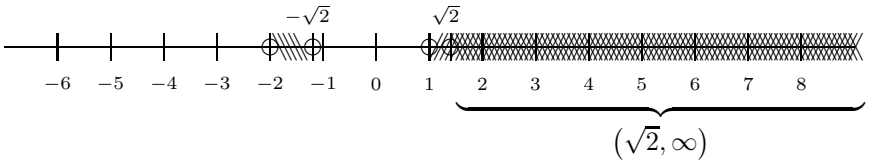
entonces,

	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, \infty\right)$
$\sqrt{2} - x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\sqrt{2} + x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)}{x+2}$	$+$	$-$	$+$	$-$

esto implica que, $x \in \left(-2, -\sqrt{2}\right) \bigcup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$.

Luego, la solución de la desigualdad $\ln x - \ln(x+2) < \ln(x-1)$ viene dada por

$$x \in C_{\text{def}} \bigcap \left\{\left(-2, -\sqrt{2}\right) \bigcup \left(\sqrt{2}, \infty\right)\right\} \implies x \in (1, \infty) \bigcap \left\{\left(-2, -\sqrt{2}\right) \bigcup \left(\sqrt{2}, \infty\right)\right\} \implies x \in \left(\sqrt{2}, \infty\right).$$



★

Ejemplo 126 *: Resolver* $e^{2x^2-7x+3}=1$.

Solución : Aplicamos la función inversa de la exponencial natural, es decir, la función logaritmo natural o logaritmo neperiano y obtenemos

$$e^{2x^2-7x+3}=1 \quad\Longrightarrow\quad \ln\left(e^{2x^2-7x+3}\right)=\ln 1 \quad\Longrightarrow\quad 2x^2-7x+3=0,$$

resolvemos esta última igualdad

$$2x^2-7x+3=0 \quad\Longrightarrow\quad (2x-1)(x-3)=0,$$

las soluciones son $x=\dfrac{1}{2}$ y $x=3$. ★

Ejemplo 127 *: Resolver* $7^{3x(x-1)}=1$.

Solución : Aplicamos la función inversa de la exponencial en base 7, es decir, la función logaritmo en base 7 y obtenemos

$$7^{3x(x-1)}=1 \quad\Longrightarrow\quad \log_7\left(7^{3x(x-1)}\right)=\log_7 1 \quad\Longrightarrow\quad 3x(x-1)=0,$$

las soluciones son $x=0$ y $x=1$. ★

Ejemplo 128 *: Resolver* $2^{3x+1}=3^{2-x}$.

Solución : Es conocido que $a^x=e^{x\ln a}$, así, $2^{(\cdot)}=e^{(\cdot)\ln 2}$ y $3^{(\cdot)}=e^{(\cdot)\ln 3}$, con lo que, la igualdad se escribe

$$2^{3x+1}=3^{2-x} \quad\Longrightarrow\quad e^{(3x+1)\ln 2}=e^{(2-x)\ln 3}.$$

Aplicamos la función inversa de la exponencial natural, es decir, la función logaritmo natural o logaritmo neperiano y obtenemos

$$e^{(3x+1)\ln 2}=e^{(2-x)\ln 3} \quad\Longrightarrow\quad \ln\left(e^{(3x+1)\ln 2}\right)=\ln\left(e^{(2-x)\ln 3}\right) \quad\Longrightarrow\quad (3x+1)\ln 2=(2-x)\ln 3,$$

$$\Longrightarrow\quad 3\ln 2\ x+\ln 2=2\ln 3-\ln 3\ x \quad\Longrightarrow\quad 3\ln 2\ x+\ln 3\ x=2\ln 3-\ln 2$$

$$\Longrightarrow\quad (3\ln 2+\ln 3)\,x=2\ln 3-\ln 2 \quad\Longrightarrow\quad \left(\ln 2^3+\ln 3\right)x=\ln 3^2-\ln 2$$

$$\Longrightarrow\quad (\ln 8+\ln 3)\,x=\ln 9-\ln 2 \quad\Longrightarrow\quad \ln\left((8)(3)\right)\ x=\ln\left(\frac{9}{2}\right) \quad\Longrightarrow\quad \ln 24\ x=\ln\left(\frac{9}{2}\right),$$

resolvemos esta última igualdad

$$\ln 24\ x=\ln\left(\frac{9}{2}\right) \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}{\ln 24},$$

la solución es $x=\dfrac{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}{\ln 24}$. ★

Ejemplo 129 *: Resolver* $2^{3x+1}<3^{2-x}$.

Solución : Es conocido que,

$$a^x=e^{x\ln a},$$

así, $2^{(\cdot)}=e^{(\cdot)\ln 2}$ y $3^{(\cdot)}=e^{(\cdot)\ln 3}$, con lo que

$$2^{3x+1}<3^{2-x} \qquad \text{se escribe como} \qquad e^{(3x+1)\ln 2}<e^{(2-x)\ln 3}.$$

Aplicamos la función inversa de la exponencial natural, es decir, la función logaritmo natural o logaritmo neperiano, puesto que la función logaritmo natural es creciente, entonces la desigualdad no cambia y obtenemos

$$e^{(3x+1)\ln 2} < e^{(2-x)\ln 3} \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(e^{(3x+1)\ln 2}\right) < \ln\left(e^{(2-x)\ln 3}\right) \quad \Longrightarrow \quad (3x+1)\ln 2 < (2-x)\ln 3,$$

resolvemos esta última desigualdad

$$\begin{aligned}(3x+1)\ln 2 < (2-x)\ln 3 \quad &\Longrightarrow \quad 3x\ln 2 + \ln 2 < 2\ln 3 - x\ln 3 \quad \Longrightarrow \quad 3x\ln 2 + x\ln 3 < 2\ln 3 - \ln 2 \\ &\Longrightarrow \quad x\left(3\ln 2 + \ln 3\right) < 2\ln 3 - \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad x\left(\ln\left(2^3\right) + \ln 3\right) < \ln\left(3^2\right) - \ln 2 \\ &\Longrightarrow \quad x\left(\ln 8 + \ln 3\right) < \ln 9 - \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad x\ \ln 24 < \ln\left(\frac{9}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}{\ln 24}.\end{aligned}$$

Luego, la solución viene dada por

$$x \in \left(-\infty, \frac{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}{\ln 24}\right).$$

★

Ejemplo 130 *: Hallar el conjunto solución de*

$$\frac{4^{|x+2|}}{2^{|x-1|}} \leq 16.$$

Solución : Observemos que

$$\frac{4^{|x+2|}}{2^{|x-1|}} \leq 16 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\left(2^2\right)^{|x+2|}}{2^{|x-1|}} \leq 2^4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2^{2|x+2|}}{2^{|x-1|}} \leq 2^4 \quad \Longrightarrow \quad 2^{|2x+4|-|x-1|} \leq 2^4,$$

aplicamos $\log_2(\cdot)$, la desigualdad no cambia, pues la función $f(x) = \log_2 x$, es creciente

$$\log_2\left(2^{|2x+4|-|x-1|}\right) \leq \log_2\left(2^4\right) \quad \Longrightarrow \quad |2x+4| - |x-1| \leq 4.$$

Por la definición de valor absoluto

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad 2x+4 \geq 0 \\ -(2x+4) & \text{si} \quad 2x+4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x \geq -2 \\ -(2x+4) & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$$

y

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

tenemos que la recta real se secciona en

$(-\infty, -2)$	$[-2, 1)$	$[1, \infty)$
$-(2x+4)$	$2x+4$	$2x+4$
$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$

Caso I : Intervalo $(-\infty, -2)$.

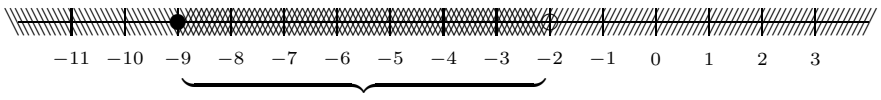
$$|2x+4| - |x-1| \leq 4, \qquad \text{nos queda,} \qquad -(2x+4) - (1-x) \leq 4,$$

resolviendo,

$$-(2x+4) - (1-x) \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad -x \leq 9 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 9,$$

entonces,

$$\text{sol}_1 = [-9, \infty) \bigcap (-\infty, -2) = [-9, -2).$$



$$\text{sol}_1 = [-9, -2)$$

Caso II : Intervalo $[-2, 1)$.

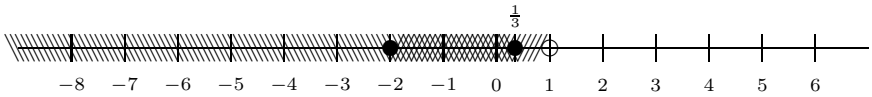
$$|2x+4| - |x-1| \leq 4, \qquad \text{nos queda} \qquad 2x+4-(1-x) \leq 4,$$

resolviendo,

$$2x+4-(1-x) \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad 3x \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \leq \frac{1}{3},$$

entonces,

$$\text{sol}_2 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \bigcap [-2, 1) = \left[-2, \frac{1}{3}\right].$$



$$\text{sol}_2 = \left[-2, \tfrac{1}{3}\right]$$

Caso III : Intervalo $[1, \infty)$.

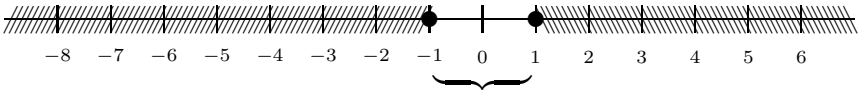
$$|2x+4| - |x-1| \leq 4, \qquad \text{nos queda} \qquad 2x+4-(x-1) \leq 4,$$

resolviendo,

$$2x+4-(x-1) \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -1,$$

entonces,

$$\text{sol}_3 = (-\infty, -1] \bigcap [1, \infty) = \varnothing.$$



$$\text{sol}_3 = (-\infty, -1] \bigcap [1, \infty) = \varnothing$$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_F = \text{sol}_1 \bigcup \text{sol}_2 \bigcup \text{sol}_3 = [-9, -2) \bigcup \left[-2, \frac{1}{3}\right] \bigcup \varnothing = \left[-9, \frac{1}{3}\right]$$

★

Ejemplo 131 *: Demuestre que la primera derivada de la función* $f(x) = a^x$, *con* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *es*

$$f'(x) = a^x \ln a.$$

Demostración : Observemos que

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} \qquad \Longrightarrow \qquad a^x = e^{x \ln a}, \tag{1}$$

es decir,

$$f(x) = a^x \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = e^{x \ln a}.$$

Derivamos respecto a x usando la regla de la cadena

$$f'(x) = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} [x \ln a]' = e^{x \ln a} \ln a,$$

puesto que, $e^{x \ln a} = a^x$ (ver ecuación (1)), entonces

$$f'(x) = a^x \ln a.$$

★

Ejemplo 132 *: Demuestre que si* $f(x) = \log_a |x|$, *entonces* $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$, *con* $a > 0$ *y* $a \neq 1$.

Solución : Es conocido que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

por lo tanto,

$$\log_a |x| = \begin{cases} \log_a x & \text{si} \quad x > 0 \\ \log_a (-x) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\log_a (\cdot) = \frac{\ln(\cdot)}{\ln a},$$

donde, $\ln a$ está bien definido, ya que, $a > 0$ y $a \neq 1$, así,

$$\log_a |x| = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{\ln a} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{\ln(-x)}{\ln a} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Al derivar, para $x > 0$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \left(\underbrace{\frac{\ln x}{\ln a}}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\ln a \text{ es constante sale de la derivada}}}}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Para $x < 0$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\log_a(-x)) = \left(\underbrace{\frac{\ln(-x)}{\ln a}}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\ln a \text{ es constante sale de la derivada}}}}\right)' = \frac{1}{\ln a}\underbrace{(\ln(-x))'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Derivada: Regla de la cadena}}}} = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\log_a |x|) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln a} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{x \ln a} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases},$$

de aquí,

$$\frac{d}{dx}(\log_a |x|) = \frac{1}{x \ln a}.$$

★

Ejemplo 133 *: Hallar la primera derivada de* $f(x) = 3^{\operatorname{sen} x}$.

Solución : En virtud que la función f es una función compuesta, derivamos usando la regla de la cadena

$$f'(x) = [3^{\operatorname{sen} x}]' = 3^{\operatorname{sen} x} \ln 3 \ [\operatorname{sen} x]' = 3^{\operatorname{sen} x} \ln 3 \ \cos x.$$

Luego, $f'(x) = 3^{\operatorname{sen} x} \ \cos x \ \ln 3.$ ★

Ejemplo 134 *: Hallar la primera derivada de* $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$.

Solución : Observemos que la función f no es una función potencia ni tampoco una función exponencial, así, que para obtener su derivada aplicamos derivación logarítmica.

Aplicamos logaritmo a ambos lados de la igualdad para obtener

$$y = x^{\operatorname{sen} x} \quad \Longrightarrow \quad \ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x} \quad \Longrightarrow \quad \ln y = \operatorname{sen} x \ \ln x,$$

derivamos implicítamente,

$$(\ln y)' = (\operatorname{sen} x \ln x)' \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\, y' = (\operatorname{sen} x)' \ln x + \operatorname{sen} x\, (\ln x)' \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \cos x \ \ln x + \operatorname{sen} x \ \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad y' = y\left[\cos x \ \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] \quad \Longrightarrow \quad y' = x^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x \ \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right],$$

ya que, $y = x^{\operatorname{sen} x}$, luego,

$$f'(x) = x^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x \ \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right].$$

★

Ejemplo 135 *: Hallar la primera derivada de*

$$f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x} + 2^{3^x} - x^{\log_3(4x)}.$$

Solución : Derivamos

$$f'(x) = \left[(\operatorname{sen} x)^{\ln x} + 2^{3^x} - x^{\log_3(4x)}\right]' = \left[(\operatorname{sen} x)^{\ln x}\right]' + \left[2^{3^x}\right]' - \left[x^{\log_3(4x)}\right]',$$

donde,

- Si $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$, aplicamos logaritmo a ambos lados de la igualdad para obtener

  $$y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x} \quad \Longrightarrow \quad \ln y = \ln (\operatorname{sen} x)^{\ln x} \quad \Longrightarrow \quad \ln y = \ln x \ln (\operatorname{sen} x),$$

  derivamos implicítamente,

  $$(\ln y)' = (\ln x \ln (\operatorname{sen} x))' \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\, y' = (\ln x)' \ln (\operatorname{sen} x) + \ln x\, (\ln (\operatorname{sen} x))'$$

  $$\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \ln (\operatorname{sen} x) + \ln x \ \frac{1}{\operatorname{sen} x} \ \cos x \quad \Longrightarrow \quad y' = y\left[\frac{\ln (\operatorname{sen} x)}{x} + \ln x \ \cot x\right],$$

  pero, $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$, luego

  $$y' = \left((\operatorname{sen} x)^{\ln x}\right)' = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}\left[\frac{\ln (\operatorname{sen} x)}{x} + \ln x \ \cot x\right].$$

- Sea $z = 2^{3^x}$. observemos que esta es una composicón de funciones exponenciales de base 2 y 3, así, su derivada viene dada por

  $$z' = \left(2^{3^x}\right)' = 2^{3^x} \ln 2 \ 3^x \ln 3 = 2^{3^x} 3^x \ln 2 \ \ln 3.$$

- Sea $w = x^{\log_3(4x)}$, aplicamos logaritmo natural a ambos lados y obtenemos

  $$w = x^{\log_3(4x)} \quad \Longrightarrow \quad \ln w = \ln\left(x^{\log_3(4x)}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ln w = \log_3 (4x) \ln x,$$

derivamos implicítamente,

$$(\ln w)' = (\log_3(4x)\ln x)' \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{w}\, w' = (\log_3(4x))'\ \ln x + \log_3(4x)\ \ (\ln x)'$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{w'}{w} = \frac{1}{x\ln 3}\ln x + \log_3(4x)\ \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad w' = w\left[\frac{\ln x}{x\ln 3} + \frac{\log_3(4x)}{x}\right],$$

pero, $w = x^{\log_3(4x)}$, luego

$$w' = \left(x^{\log_3(4x)}\right)' = x^{\log_3(4x)}\left[\frac{\ln x}{x\ln 3} + \frac{\log_3(4x)}{x}\right].$$

Finalmente,

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}\left[\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x} + \ln x\ \cot x\right] + 2^{3^x}3^x\ln 2\ \ln 3 - x^{\log_3(4x)}\left[\frac{\ln x}{x\ln 3} + \frac{\log_3(4x)}{x}\right].$$

★

Ejemplo 136 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right)$.

Solución : Puesto que la función seno es una función continua, entonces

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right),$$

observemos que el límite argumento de la función seno es de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$, por lo tanto, aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos 3x))'}{(e^x - e^{-x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-3\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\operatorname{sen} 3x}{(e^x + e^{-x})\cos 3x} = \frac{0}{2} = 0,$$

luego,

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0.$$

★

Ejemplo 137 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^x - 3}{2^x + 4}$.

Solución : Observemos que este límite es de la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$. Es conocido que

$$5^x = e^{x\ln 5} \qquad \text{y} \qquad 2^x = e^{x\ln 2},$$

así,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x - 3}{2^x + 4} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x\ln 5} - 3}{e^{x\ln 2} + 4}.$$

Aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x\ln 5} - 3}{e^{x\ln 2} + 4} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{x\ln 5} - 3\right)'}{\left(e^{x\ln 2} + 4\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x\ln 5}\ln 5}{e^{x\ln 2}\ln 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2}\lim_{x\to\infty} e^{x(\ln 5 - \ln 2)} = \infty.$$

★

Ejemplo 138 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim\limits_{t\to\infty}(\ln t - \ln(3t-1))$.

Solución : Como $\ln t \to \infty$, cuando $t \to \infty$, entonces,

$$\lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln(3t-1))$$

presenta una indeterminación de la forma $\infty - \infty$. Levantamos la indeterminación, es conocido que

$$\textbf{Propiedad II :} \qquad \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right),$$

así,

$$\ln t - \ln(3t-1) = \ln\left(\frac{t}{3t-1}\right),$$

por lo que, el límite queda

$$\lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln(3t-1)) = \lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t}{3t-1}\right),$$

puesto que, la función logaritmo neperiano es una función continua, podemos introducir el límite dentro de la aplicación logaritmo neperiano y nos queda

$$\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t}{3t-1}\right) = \ln\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3t-1}\right),$$

observemos que, el nuevo límite, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{3t-1}$, es un límite de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, aplicando la regla de L'Hopital se tiene

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3t-1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{[t]'}{[3t-1]'} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3t-1} = \frac{1}{3},$$

de aquí,

$$\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t}{3t-1}\right) = \ln\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3t-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 1 - \ln 3 = 0 - \ln 3.$$

Finalmente,

$$\lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln(3t-1)) = -\ln 3.$$

★

Ejemplo 139 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

Solución : Observemos que el término general $a_k = \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ se puede escribir como

$$a_k = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k,$$

así,

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k),$$

la cual es una suma telescópica, por lo que

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+n\right)=\infty.$$

★

Ejemplo 140 *: Escriba como una integral definida el siguiente límite y luego evalue*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n^2}}{n^2}\left(e^{-2/n^2}+2e^{-5/n^2}+3e^{-10/n^2}+\cdots+ne^{-1-1/n^2}\right).$$

Solución : Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{1/n^2}}{n^2}\left(e^{-2/n^2}+2e^{-5/n^2}+3e^{-10/n^2}+\cdots+ne^{-1-1/n^2}\right)\\
&\qquad=\frac{e^{1/n^2}}{n}\left(e^{-2/n^2}+2e^{-5/n^2}+3e^{-10/n^2}+\cdots+ne^{-1-1/n^2}\right)\frac{1}{n}\\
&\qquad=\left(\frac{1}{n}\,e^{-1/n^2}+\frac{2}{n}\,e^{-4/n^2}+\frac{3}{n}\,e^{-9/n^2}+\cdots+\frac{n}{n}\,e^{-1}\right)\frac{1}{n}\\
&\qquad=\left(\frac{1}{n}\,e^{-(1)^2/n^2}+\frac{2}{n}\,e^{-(2)^2/n^2}+\frac{3}{n}\,e^{-(3)^2/n^2}+\cdots+\frac{n}{n}\,e^{-(n)^2/n^2}\right)\frac{1}{n}\\
&\qquad=\left(\left(\frac{1}{n}\right)e^{-(1/n)^2}+\left(\frac{2}{n}\right)e^{-(2/n)^2}+\left(\frac{3}{n}\right)e^{-(3/n)^2}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)e^{-(n/n)^2}\right)\frac{1}{n}\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)e^{-(k/n)^2}\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Consideramos la partición regular del intervalo $[0,1]$, de n subintervalos, entonces

$$\Delta=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

y la partición viene dada por

$$x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<x_3=\frac{3}{n}<\cdots<x_k=\frac{k}{n}<\cdots<x_n=\frac{n}{n}=1.$$

Sean $f\left(x\right)=xe^{-x^2}$ y $x_k^*=x_k=\dfrac{k}{n}$, así,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n^2}}{n^2}\left(e^{-2/n^2}+2e^{-5/n^2}+3e^{-10/n^2}+\cdots+ne^{-1-1/n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)e^{-(k/n)^2}\frac{1}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k^*\,e^{x_k^*}\,\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k^*\right)\Delta x_k=\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx,
\end{aligned}$$

donde $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ se resuelve con el cambio de variable

$$u=-x^2\qquad\xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}}\qquad du=-2x\,dx\quad\Longrightarrow\quad-\frac{du}{2}=x\,dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos el intervalo de integración

$$\text{Si} \quad x=0, \quad \text{entonces,} \quad u=-(0)^2=0 \quad \Longrightarrow \quad u=0.$$

$$\text{Si} \quad x=1, \quad \text{entonces,} \quad u=-(1)^2=-1 \quad \Longrightarrow \quad u=-1,$$

la integral queda

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=\int_0^{-1} e^u\left(-\frac{du}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u\,du \overset{\boxed{\text{Propiedad de la integral definida: } \int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^u\,du=\frac{1}{2}\left(\,e^u\,\right|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left(\overbrace{e^0}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}-\overbrace{e^{-1}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1-e^{-1}}{2}.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n^2}}{n^2}\left(e^{-2/n^2}+2e^{-5/n^2}+3e^{-10/n^2}+\cdots+ne^{-1-1/n^2}\right)=\frac{1-e^{-1}}{2}.$$

★

Ejemplo 141 *: Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x)=\displaystyle\int_{\ln x}^{8}\frac{e^{2t}}{t^2+\ln t}\,dt.$

Solución : Observemos que la función f es la composición de las funciones

$$g(x)=\int_x^8\frac{e^{2t}}{t^2+\ln t}\,dt \qquad \text{y} \qquad h(x)=\ln x,$$

ya que,

$$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(\ln x)=\int_{\ln x}^{8}\frac{e^{2t}}{t^2+\ln t}\,dt=f(x),$$

por lo tanto, para obtener la derivada de f aplicamos la regla de la cadena

$$f'(x)=[g(h(x))]'=\underbrace{g'(h(x))}_{\boxed{\text{Derivada de la función externa evaluada en la función interna}}}\ \underbrace{h'(x)}_{\boxed{\text{Derivada de la función interna}}},$$

por otra parte, observe que el límite variable está en la cota inferior, así,

$$f(x)=\int_{\ln x}^{8}\frac{e^{2t}}{t^2+\ln t}\,dt \underset{\boxed{\text{Propiedad de la integral } \int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx}}{=} -\int_8^{\ln x}\frac{e^{2t}}{t^2+\ln t}\,dt.$$

La propiedad aplicada a la integral es debido a que el Primer Teorema Fundamental del Cálculo exige que el límite variable se encuentre en la cota superior de la integral definida, así,

$$f(x)=-\int_8^{\ln x}\frac{e^{2t}}{t^2+\ln t}\,dt,$$

derivamos respecto a x,

$$f'(x) = \overbrace{\frac{d}{dx}\left(-\int_8^{\ln x} \frac{e^{2t}}{t^2+\ln t}\,dt\right)}^{\text{Derivada de una función compuesta}} \underset{\uparrow}{=} -\frac{e^{2\ln x}}{(\ln x)^2+\ln(\ln x)}\underbrace{(\ln x)'}_{\uparrow} = -\frac{e^{\ln x^2}}{\ln^2 x+\ln(\ln x)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Derivada de la función interna

$$= -\frac{x^2}{\ln^2 x+\ln(\ln x)}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{x}{\ln^2 x+\ln(\ln x)}.$$

Luego,

$$f'(x) = -\frac{x}{\ln^2 x+\ln(\ln x)}.$$

★

Ejemplo 142 *: Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x) = \int_{e^x}^{\operatorname{sen} x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du.$

Solución : Escribimos la función f como

$$f(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{e^x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}du \underset{\uparrow}{=} \int_{\operatorname{sen} x}^{a} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}du + \int_a^{e^x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}du \underset{\uparrow}{=} -\int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}du + \int_a^{e^x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}du,$$

Propiedad de la integral $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Propiedad de la integral $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

donde, a es una constante cualquiera que cumple con $\operatorname{sen} x \le a \le e^x$. Por lo tanto

$$f(x) = -\int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du + \int_a^{e^x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du,$$

derivamos respecto a x.

$$f'(x) = \left[\int_a^{e^x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du - \int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du\right]' \underset{\uparrow}{=} \left[\int_a^{e^x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du\right]' - \left[\int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du\right]',$$

Derivada de una resta de funciones

donde

$$\overbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_a^{e^x} \frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du\right)}^{\text{Derivada de una función compuesta}} \underset{\uparrow}{=} \frac{5^{e^x}+(e^x)^2}{\arctan(e^x)}\underbrace{(e^x)'}_{\uparrow} = \frac{5^{e^x}+e^{2x}}{\arctan(e^x)}\,e^x = \frac{\left(5^{e^x}+e^{2x}\right)e^x}{\arctan(e^x)},$$

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Derivada de la función interna

mientras que,

$$\overbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\operatorname{sen} x}\frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du\right)}^{\text{Derivada de una función compuesta}} \underset{\uparrow}{=} \frac{5^{\operatorname{sen} x}+(\operatorname{sen} x)^2}{\arctan(\operatorname{sen} x)}\underbrace{(\operatorname{sen} x)'}_{\uparrow} = \frac{5^{\operatorname{sen} x}+\operatorname{sen}^2 x}{\arctan(\operatorname{sen} x)}\cos x = \frac{\left(5^{\operatorname{sen} x}+\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x}{\arctan(\operatorname{sen} x)}.$$

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Derivada de la función interna

Por lo tanto,

$$f'(x) = \left[\int_a^{e^x}\frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du\right]' - \left[\int_a^{\operatorname{sen} x}\frac{5^u+u^2}{\arctan u}\,du\right]' = \frac{\left(5^{e^x}+e^{2x}\right)e^x}{\arctan(e^x)} - \frac{\left(5^{\operatorname{sen} x}+\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x}{\arctan(\operatorname{sen} x)}.$$

Luego,

$$f'(x) = \frac{\left(5^{e^x}+e^{2x}\right)e^x}{\arctan(e^x)} - \frac{\left(5^{\operatorname{sen} x}+\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x}{\arctan(\operatorname{sen} x)}.$$

★

Ejemplo 143 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{\log(\sqrt{x}) - \log_3(\sqrt[4]{x})}{\log_5 x}\,dx.$

Solución : Es conocido que $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, para $a>0$ y $a\neq 1$, por lo tanto,

$$\log(\sqrt{x}) = \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln 10}, \qquad \log_3(\sqrt[4]{x}) = \frac{\ln(\sqrt[4]{x})}{\ln 3} \qquad \text{y} \qquad \log_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5}.$$

Puesto que,

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[4]{x} = x^{1/4},$$

por la propiedad del logaritmo de una potencia, $\ln x^y = y\ln x$, se tiene que

$$\ln(\sqrt{x}) = \ln\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln x \qquad \text{y} \qquad \ln(\sqrt[4]{x}) = \ln\left(x^{1/4}\right) = \frac{1}{4}\ln x,$$

así,

$$\log(\sqrt{x}) = \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln 10} = \frac{\frac{1}{2}\ln x}{\ln 10} = \frac{\ln x}{2\ln 10} \qquad \text{y} \qquad \log_3(\sqrt[4]{x}) = \frac{\ln(\sqrt[4]{x})}{\ln 3} = \frac{\frac{1}{4}\ln x}{\ln 3} = \frac{\ln x}{4\ln 3}.$$

Al sustituir las correspondientes expresiones de los términos $\log(\sqrt{x})$, $\log_3(\sqrt[4]{x})$ y $\log_5 x$ en el integrando se tiene

$$\frac{\log(\sqrt{x}) - \log_3(\sqrt[4]{x})}{\log_5 x} = \frac{\dfrac{\ln x}{2\ln 10} - \dfrac{\ln x}{4\ln 3}}{\dfrac{\ln x}{\ln 5}} = \frac{\ln x\left(\dfrac{1}{2\ln 10} - \dfrac{1}{4\ln 3}\right)}{\dfrac{\ln x}{\ln 5}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2\ln 10} - \dfrac{1}{4\ln 3}}{\dfrac{1}{\ln 5}} = \ln 5\left(\frac{1}{2\ln 10} - \frac{1}{4\ln 3}\right),$$

es decir,

$$\frac{\log(\sqrt{x}) - \log_3(\sqrt[4]{x})}{\log_5 x} = \ln 5\left(\frac{1}{2\ln 10} - \frac{1}{4\ln 3}\right)$$

y la integral queda

$$\int \frac{\log\left(\sqrt{x}\right) - \log_3\left(\sqrt[4]{x}\right)}{\log_5 x}\ dx = \int \ln 5\ \left(\frac{1}{2\ln 10} - \frac{1}{4\ln 3}\right) dx = \ln 5\ \left(\frac{1}{2\ln 10} - \frac{1}{4\ln 3}\right) \int dx$$

$$= \ln 5\ \left(\frac{1}{2\ln 10} - \frac{1}{4\ln 3}\right) x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\log\left(\sqrt{x}\right) - \log_3\left(\sqrt[4]{x}\right)}{\log_5 x}\ dx = \ln 5\ \left(\frac{1}{2\ln 10} - \frac{1}{4\ln 3}\right) x + C.$$

★

Ejemplo 144 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{x^4 \log_4 x - \ln x}{\ln\left(\sqrt[4]{x}\right)}\ dx.$

Solución : Es conocido que $\log_4 x = \dfrac{\ln x}{\ln 4}$ y $\ln\left(\sqrt[4]{x}\right) = \dfrac{1}{4}\ln x$, entonces, la integral la podemos escribir como

$$\int \frac{x^4 \log_4 x - \ln x}{\ln\left(\sqrt[4]{x}\right)}\ dx = \int \frac{x^4\ \dfrac{\ln x}{\ln 4} - \ln x}{\dfrac{1}{4}\ln x}\ dx = \int \frac{\ln x\left(\dfrac{x^4}{\ln 4} - 1\right)}{\dfrac{1}{4}\ln x}\ dx = 4\int \left(\frac{x^4}{\ln 4} - 1\right) dx$$

así,

$$\int \frac{x^4 \log_4 x - \ln x}{\ln\left(\sqrt[4]{x}\right)}\ dx = 4\int \left(\frac{x^4}{\ln 4} - 1\right) dx = 4\left(\frac{1}{\ln 4}\frac{x^5}{5} - x\right) + C.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^4 \log_4 x - \ln x}{\ln\left(\sqrt[4]{x}\right)}\ dx = \frac{4x^5}{5\ln 4} - 4x + C.$$

★

Ejemplo 145 *: Integrar* $\displaystyle\int 6^{2x/\ln 6} e^{-x}\ dx.$

Solución : Es conocido que $a^{(\cdot)} = e^{(\cdot)\ln a}$, por lo tanto,

$$6^{2x/\ln 6} = \exp\left(\frac{2x}{\ln 6}\ \ln 6\right) = \exp\left(2x\right) = e^{2x},$$

es decir,

$$6^{2x/\ln 6} = e^{2x}.$$

Al integrar

$$\int 6^{2x/\ln 6} e^{-x}\ dx = \int e^{2x} e^{-x}\ dx = \int e^{2x-x}\ dx = \int e^{x}\ dx = e^{x} + C.$$

Luego

$$\int 6^{2x/\ln 6} e^{-x}\ dx = e^{x} + C.$$

★

Ejemplo 146 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^{x}}{e^{x-5}}\ dx.$

Solución : Se tiene que

$$\frac{e^{2x} - e^{x}}{e^{x-5}} = \frac{e^{2x}}{e^{x-5}} - \frac{e^{x}}{e^{x-5}},$$

por propiedades de la exponencial, se obtiene

$$\frac{e^{2x}}{e^{x-5}} = e^{2x-(x-5)} = e^{2x-x+5} = e^{x+5} = e^x\ e^5, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{e^{2x}}{e^{x-5}} = e^x\ e^5,$$

de igual manera,

$$\frac{e^x}{e^{x-5}} = e^{x-(x-5)} = e^{x-x+5} = e^5, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{e^x}{e^{x-5}} = e^5,$$

por lo tanto,

$$\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{x-5}}\ dx = \int \left(e^x\ e^5 - e^5\right) dx = \int e^5\ \left(e^x - 1\right) dx = e^5 \int \left(e^x - 1\right) dx = e^5\ \left(e^x - x + C_1\right)$$

$$= e^5\ e^x - xe^5 + C = e^{x+5} - xe^5 + C.$$

Luego,

$$\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{x-5}}\ dx == e^{x+5} - xe^5 + C.$$

★

Ejemplo 147 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^{2x}-5e^x+2}{e^{2x}-3e^x+1}\ dx.$

Solución : Es conocido que $e^{ab} = \left(e^a\right)^b$, así,

$$\frac{e^{3x}-e^{2x}-5e^x+2}{e^{2x}-3e^x+1} = \frac{\left(e^x\right)^3 - \left(e^x\right)^2 - 5e^x + 2}{\left(e^x\right)^2 - 3e^x + 1}.$$

Observamos que la expresión del numerador se factoriza como

$$\left(e^x\right)^3 - \left(e^x\right)^2 - 5e^x + 2 = \left(e^x + 2\right)\left(\left(e^x\right)^2 - 3e^x + 1\right),$$

así, el integrando queda

$$\frac{e^{3x}-e^{2x}-5e^x+2}{e^{2x}-3e^x+1} = \frac{\left(e^x+2\right)\left(\left(e^x\right)^2 - 3e^x + 1\right)}{\left(e^x\right)^2 - 3e^x + 1} = e^x + 2$$

y la integral se escribe

$$\int \frac{e^{3x}-e^{2x}-5e^x+2}{e^{2x}-3e^x+1}\ dx = \int \left(e^x + 2\right) dx = e^x + 2x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{e^{3x}-e^{2x}-5e^x+2}{e^{2x}-3e^x+1}\ dx = e^x + 2x + C.$$

★

Ejemplo 148 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{1-e^x}{1-e^{-x}}\ dx.$

Solución : Por propiedad de la función exponencial, se tiene que

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \qquad \text{de aquí,} \qquad 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x},$$

entonces,

$$\frac{1-e^x}{1-e^{-x}} = \frac{1-e^x}{\dfrac{e^x-1}{e^x}} = \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{e^x-1} = \frac{-e^x\left(e^x-1\right)}{e^x-1} = -\ e^x,$$

es decir,

$$\frac{1-e^x}{1-e^{-x}} = -\ e^x.$$

Al integrar

$$\int \frac{1-e^x}{1-e^{-x}}\ dx = \int -\ e^x\ dx = -\int e^x\ dx = -\ e^x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{1-e^x}{1-e^{-x}}\ dx = -\ e^x + C.$$

★

Ejemplo 149 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{dx}{1-e^{-3x}}$.

Solución : Tenemos que

$$\frac{1}{1-e^{-3x}} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{e^{3x}}} = \frac{1}{\dfrac{e^{3x}-1}{e^{3x}}} = \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dx}{1-e^{-3x}} = \int \frac{e^{3x}\ dx}{e^{3x}-1}.$$

Se propone el siguiente cambio de variable

$$u = e^{3x}-1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 3e^{3x}\ dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{3} = e^{3x}\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{dx}{1-e^{-3x}} = \int \frac{e^{3x}\ dx}{e^{3x}-1} = \int \frac{1}{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}-1\right| + C,$$

ya que, $u = e^{3x}-1$. Luego,

$$\int \frac{dx}{1-e^{-3x}} = \frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}-1\right| + C.$$

★

Ejemplo 150 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{-x}}\ dx$.

Solución : Por la propiedad de la exponencial, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, se tiene que

$$\int \frac{e^x}{1+e^{-x}}\ dx = \int \frac{e^x}{1+\dfrac{1}{e^x}}\ dx = \int \frac{e^x}{\dfrac{e^x+1}{e^x}}\ dx = \int \frac{e^x e^x}{e^x+1}\ dx.$$

Se propone el siguiente cambio de variable

$$u = e^x+1 \qquad \text{de aquí} \qquad e^x = u-1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = e^x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{e^x}{1+e^{-x}}\ dx = \int \frac{e^x e^x}{e^x+1}\ dx = \int \frac{u-1}{u}\ du = \int \left(1-\frac{1}{u}\right)\ du = u - \ln|u| + C$$

$$= e^x + 1 - \ln|e^x+1| + C = e^x - \ln|e^x+1| + C.$$

Luego,

$$\int \frac{e^x}{1+e^{-x}}\ dx = e^x - \ln|e^x+1| + C.$$

★

Ejemplo 151 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{dx}{5^{-x}-1}\ dx.$

Solución : Por la propiedad de la exponencial, $5^{-a} = \dfrac{1}{5^a}$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{5^{-x}-1} = \int \frac{dx}{\frac{1}{5^x}-1} = \int \frac{dx}{\frac{1-5^x}{5^x}} = \int \frac{5^x\ dx}{1-5^x},$$

como, $5^x = e^{x\ln 5}$, se tiene

$$\int \frac{5^x\ dx}{1-5^x} = \int \frac{e^{x\ln 5}\ dx}{1-e^{x\ln 5}}.$$

Se propone el cambio de variable

$$u = 1 - e^{x\ln 5} \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad du = -e^{x\ln 5}\ln 5\ dx \quad \Longrightarrow \quad -\frac{du}{\ln 5} = e^{x\ln 5}\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{e^{x\ln 5}\ dx}{1-e^{x\ln 5}} = -\frac{1}{\ln 5}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{\ln 5}\ln|u| + C = -\frac{1}{\ln 5}\ln\left|1-e^{x\ln 5}\right| + C = -\frac{1}{\ln 5}\ln|1-5^x| + C.$$

puesto que,

$$\int \frac{dx}{5^{-x}-1} = \int \frac{5^x\ dx}{1-5^x} = \int \frac{e^{x\ln 5}\ dx}{1-e^{x\ln 5}} = -\frac{1}{\ln 5}\ln|1-5^x| + C,$$

se concluye que

$$\int \frac{dx}{5^{-x}-1} = -\frac{1}{\ln 5}\ln|1-5^x| + C.$$

★

Ejemplo 152 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{e^x\ \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\ dx.$

Solución : Se propone el siguiente cambio de variable

$$u^2 = e^x - 1 \qquad \text{de aquí} \qquad e^x = u^2+1 \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad 2u\ du = e^x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{e^x\ \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\ dx = \int\ \frac{2u\sqrt{u^2}}{u^2+4}\ du = 2\int \frac{u^2\ du}{u^2+4}$$

de aquí,

$$\int \frac{u^2}{u^2+4}\ du = \int \frac{\left(u^2+4-4\right)}{u^2+4}\ du = \int \left(\frac{u^2+4}{u^2+4} - \frac{4}{u^2+4}\right) du$$

$$= \int \left(1 - \frac{4}{u^2+4}\right) du = \int du - \int \frac{4}{u^2+4}\ du,$$

donde,

$$\int du = u + C_1 = \sqrt{e^x-1} + C_1,$$

mientras que,

$$\int \frac{4}{u^2+4}\ du = \int \frac{4}{4\left(\frac{u^2}{4}+1\right)}\ du = \int \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\ du,$$

para resolver la nueva integral se propone el cambio de variable

$$z = \frac{u}{2} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = \frac{1}{2}\ du \qquad \Longrightarrow \qquad du = 2\ dz,$$

con este nuevo cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Se tiene

$$\int \frac{4}{u^2+4}\ du = \int \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\ du = 2\int \frac{1}{z^2+1}\ dz = 2\arctan z + C_2$$

$$= 2\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C_2 = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right) + C_2.$$

Entonces

$$\int \frac{e^x\ \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\ dx = 2\int \frac{u^2\ du}{u^2+4} = 2\left(\int du - \int \frac{4}{u^2+4}\ du\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{e^x-1} + C_1 - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right) + C_2\right) = 2\sqrt{e^x-1} - 4\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right) + C.$$

Luego

$$\int \frac{e^x\ \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\ dx = 2\sqrt{e^x-1} - 4\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right) + C$$

★

Ejemplo 153 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{(2e^t+1)\ dt}{e^t-4e^{-t}+1}$.

Solución : Por la propiedad de la exponencial, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, se tiene que

$$\int \frac{(2e^t+1)\ dt}{e^t-4e^{-t}+1} = \int \frac{(2e^t+1)\ dt}{e^t - \frac{4}{e^t}+1} = \int \frac{(2e^t+1)\ dt}{\frac{e^{2t}-4+e^t}{e^t}} = \int \frac{(2e^t+1)\,e^t\ dt}{e^{2t}-4+e^t} = \int \frac{\left(2e^{2t}+e^t\right)\ dt}{e^{2t}-4+e^t}.$$

Se propone el siguiente cambio de variable

$$u = e^{2t} - 4 + e^t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \left(2e^{2t} + e^t\right) dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{\left(2e^{2t} + e^t\right)\ dt}{e^{2t} - 4 + e^t} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|e^{2t} - 4 + e^t\right| + C.$$

Luego,

$$\int \frac{(2e^t + 1)\ dt}{e^t - 4e^{-t} + 1} = \ln\left|e^{2t} - 4 + e^t\right| + C.$$

★

Ejemplo 154 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{\ln x\ dx}{x}$.

Solución : Se propone el siguiente cambio de variable

$$u = \ln x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{dx}{x},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{\ln x}{x}\ dx = \int u\ du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\ln x}{x}\ dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

★

Ejemplo 155 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{\ln(3x)}{x\ \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}\ dx$.

Solución : Por las propiedades del logaritmo natural, se puede escribir las expresiones $\ln(3x)$ y $\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$ como

$$\ln(3x) = \ln 3 + \ln x \qquad \text{y} \qquad \ln\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3}\ln x$$

con lo que, la integral queda

$$\int \frac{\ln(3x)}{x\ \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}\ dx = \int \frac{\ln(3x)}{x\ \ln\left(x^{1/3}\right)}\ dx = \int \frac{\ln 3 + \ln x}{\dfrac{x\ \ln x}{3}}\ dx = \int \frac{3\left(\ln 3 + \ln x\right)}{x\ \ln x}\ dx.$$

Se propone el siguiente cambio de variable

$$u = \ln x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{1}{x}\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{\ln(3x)}{x\ \ln(\sqrt[3]{x})}\ dx = \int \frac{3(\ln 3+\ln x)}{x\ \ln x}\ dx = \int \frac{3(\ln 3+u)}{u}\ du = 3\int \frac{\ln 3+u}{u}\ du = 3\int \left(\frac{\ln 3}{u}+\frac{u}{u}\right) du$$

$$= 3\int \left(\frac{\ln 3}{u}+1\right) du = 3\left(\int \frac{\ln 3}{u}\ du + \int du\right) = 3\ln 3\ \ln|u| + 3u + C = \ln 27\ \ln|\ln x| + 3\ln x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\ln(3x)}{x\ \ln(\sqrt[3]{x})}\ dx = \ln 27\ \ln|\ln x| + 3\ln x + C.$$

★

Ejemplo 156 *: Integrar* $\int \sec x\ dx.$

Solución : Se tiene

$$\int \sec x\ dx = \int \sec x\ \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\ dx = \int \frac{\sec^2 x+\sec x\ \tan x}{\sec x+\tan x}\ dx,$$

se propone el cambio de variable

$$u = \sec x + \tan x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \left(\sec x\ \tan x + \sec^2 x\right)\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces,

$$\int \sec x\ dx = \int \frac{\sec^2 x+\sec x\ \tan x}{\sec x+\tan x}\ dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec x+\tan x| + C.$$

Luego,

$$\int \sec x\ dx = \ln|\sec x+\tan x| + C.$$

★

Ejemplo 157 *: Integrar* $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\ dx.$

Solución : Por la propiedad de la exponencial $e^{ab} = (e^a)^b$, se tiene que el integrando se puede escribir

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{4-(e^x)^2}},$$

por otra parte,

$$\frac{e^x}{\sqrt{4-(e^x)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{4-\frac{4(e^x)^2}{4}}} = \frac{e^x}{\sqrt{4\left(1-\frac{(e^x)^2}{4}\right)}} = \frac{e^x}{2\sqrt{1-\frac{(e^x)^2}{4}}} = \frac{e^x}{2\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{2}\right)^2}},$$

así, la integral se escribe

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\ dx = \int \frac{e^x\ dx}{2\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{2}\right)^2}} = \int \frac{\frac{e^x}{2}\ dx}{\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{2}\right)^2}}$$

se propone el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{e^x}{2} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{e^x}{2}\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\ dx = \int \frac{\frac{e^x}{2}\ dx}{\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{2}\right)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u + C = \operatorname{arcsen}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\ dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C.$$

★

Ejemplo 158 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{e^x\,(e^x-2)}{e^{2x}-e^x+1}\ dx.$

Solución : Al completar cuadrado

$$e^{2x} - e^x + 1 = \left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

la integral queda

$$\int \frac{e^x\,(e^x-2)}{e^{2x}-e^x+1}\ dx = \int \frac{e^x\,(e^x-2)}{\left(e^x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ dx.$$

Se propone el siguiente cambio de variable

$$u = e^x - \frac{1}{2} \qquad \text{de aquí} \qquad e^x = u + \frac{1}{2} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad 2u\ du = e^x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{e^x\,(e^x-2)}{e^{2x}-e^x+1}\ dx = \int \frac{\left(u+\frac{1}{2}\right)-2}{u^2+\frac{3}{4}}\ du = \int \frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\ du = \int \frac{u\ du}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}},$$

sean

$$I_1 = \int \frac{u\ du}{u^2+\frac{3}{4}} \qquad \text{y} \qquad I_2 = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}},$$

así,

- Para $I_1 = \displaystyle\int \frac{u\ du}{u^2+\frac{3}{4}}$, se propone el cambio de variable

$$z = u^2 + \frac{3}{4} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = 2u\ du \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\ dz = u\ du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces

$$\int \frac{u\ du}{u^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{1}{2}\ dz}{z} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + C_1.$$

Por lo tanto,

$$I_1 = \int \frac{u\ du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + C_1.$$

- Para $I_2 = \displaystyle\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$. Se expresa la integral como

$$\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{du}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}u^2+1\right)} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Se propone el siguiente cambio de variable

$$z = \frac{2u}{\sqrt{3}} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = \frac{2}{\sqrt{3}}\ du \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\ dz = du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{du}{\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ dz}{z^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan z + C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C_2,$$

se tiene que

$$\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C_2,$$

por lo tanto,

$$I_2 = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C_2.$$

Así,

$$\int \frac{e^x\left(e^x-2\right)}{e^{2x}-e^x+1}\ dx = \int \frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\ du = I_1 - \frac{3}{2}\ I_2 = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{3}{2}\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\left(e^x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\left(e^x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

ya que, $u = e^x - \dfrac{1}{2}$,

Luego,

$$\int \frac{e^x\left(e^x-2\right)}{e^{2x}-e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-e^x+1\right| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

★

Ejemplo 159 *: Calcular la siguiente integral* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u = \sqrt{e^x-1} \quad\Longrightarrow\quad e^x = u^2+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\,dx \quad\Longrightarrow\quad \frac{2u\,du}{u^2+1} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos el intervalo de integración

$$\text{Si}\quad x=0,\quad \text{entonces,}\quad u=\sqrt{e^0-1}=\sqrt{1-1}=\sqrt{0} \quad\Longrightarrow\quad u=0$$

$$\text{Si}\quad x=\ln 2,\quad \text{entonces,}\quad u=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=\sqrt{1} \quad\Longrightarrow\quad u=1,$$

la integral queda

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx = \int_0^1 u\,\frac{2u\,du}{u^2+1} = 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}du = 2\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\left(u^2+1\right)-1}{u^2+1}du = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du = 2\Big(\ u-\arctan u\ \Big|_0^1$$

$$= 2\left(\overbrace{\left((1)-\arctan(1)\right)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}} - \overbrace{\left((0)-\arctan(0)\right)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right) = 2\left[1-\frac{\pi}{4}\right] = 2-\frac{\pi}{2}.$$

Luego,

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx = 2-\frac{\pi}{2}.$$

★

Ejemplo 160 *: Calcular* $\displaystyle\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\,\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u^2 = e^x-1 \quad\Longrightarrow\quad e^x = u^2+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad 2u\,du = e^x\,dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos el intervalo de integración

$$\text{Si} \quad x=0, \quad \text{entonces,} \quad u^2=e^0-1=1-1=0 \quad \Longrightarrow \quad u=0$$

$$\text{Si} \quad x=\ln 2, \quad \text{entonces,} \quad u^2=e^{\ln 5}-1=5-1=4 \quad \Longrightarrow \quad u=2,$$

la integral queda

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\,\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx=\int_0^2 \frac{2u\,\sqrt{u^2}}{u^2+4}\,du=2\int_0^2 \frac{u^2\,du}{u^2+4}$$

observemos que

$$\int_0^2 \frac{u^2\,du}{u^2+4}=\int_0^2 \frac{\left(u^2+4-4\right)du}{u^2+4}=\int_0^2 \left(\frac{u^2+4}{u^2+4}-\frac{4}{u^2+4}\right)du=\int_0^2 \left(1-\frac{4}{u^2+4}\right)du=\int_0^4 du-\int_0^4 \frac{4\,du}{u^2+4}$$

donde

$$\int_0^2 du=2$$

y

$$\int_0^2 \frac{4}{u^2+4}\,du=\int_0^2 \frac{4}{4\left(\dfrac{u^2}{4}+1\right)}\,du=\int_0^2 \frac{1}{\left(\dfrac{u}{2}\right)^2+1}\,du.$$

Se propone el cambio de variable

$$u=z=\frac{u}{2} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz=\frac{1}{2}\,du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos el intervalo de integración

$$\text{si} \quad u=0 \quad \text{entonces} \quad z=\frac{0}{2} \quad \Longrightarrow \quad z=0$$

$$\text{si} \quad u=2 \quad \text{entonces} \quad z=\frac{2}{2} \quad \Longrightarrow \quad z=1$$

entonces, la integral se transforma en

$$\int_0^2 \frac{4}{u^2+4}\,du=\int_0^2 \frac{1}{\left(\dfrac{u}{2}\right)^2+1}\,du=2\int_0^1 \frac{1}{z^2+1}\,dz=\frac{1}{2}\pi.$$

Así

$$\int_0^2 \frac{u^2\,du}{u^2+4}=\int_0^2 \left(1-\frac{4}{u^2+4}\right)du=2-\frac{1}{2}\pi.$$

Luego

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\,\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx=2\left(2-\frac{1}{2}\pi\right)=4-\pi.$$

★

Ejemplo 161 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\,dx.$

Solución : Es conocido que

$$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen} x\cos x,$$

así, la integral se expresa como

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\ dx=\int \frac{2\operatorname{sen} x\ \cos x+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\ dx.$$

Se propone el cambio de variable

$$u=\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=(2\operatorname{sen} x\cos x+\cos x)\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\ dx=\int \frac{2\operatorname{sen} x\ \cos x+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\ dx=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left|\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2\right|+C.$$

Luego,

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\ dx=\ln\left|\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2\right|+C.$$

★

Ejemplo 162 *: Integrar* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Solución : Se propone el cambio de variable

$$x=t^4 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx=4t^3\ dt \quad\Longrightarrow\quad \frac{du}{4}=t^3\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\frac{1}{4}\int \frac{t^3\ dt}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}}=\frac{1}{4}\int \frac{t^3\ dt}{t^2+t}=\frac{1}{4}\int \frac{t^3\ dt}{t\,(t+1)}=\frac{1}{4}\int \frac{t^2\ dt}{t+1}.$$

Manipulando algebraicamente al integrando obtenemos

$$\frac{t^2}{t+1}=\frac{t^2-1+1}{t+1}=\frac{t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t+1}=\frac{(t-1)\,(t+1)}{t+1}+\frac{1}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1},$$

así,

$$\int \frac{t^2\ dt}{t+1}=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\int t\ dt-\int dt+\int \frac{dt}{t+1},$$

donde

$$\int t\ dt=\frac{t^2}{2}+C_1 \qquad \text{y} \qquad \int dt=t+C_2,$$

mientras que, para $\displaystyle\int \frac{dt}{t+1}$, se propone el cambio de variable

$$u=t+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dt}{t+1} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_3 = \ln|t+1| + C_3.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{t^2\ dt}{t+1} = \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + C,$$

como $t = \sqrt[4]{x}$, tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{4}\int \frac{t^2\ dt}{t+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right] + C = \frac{1}{4}\left[\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|\right] + C$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{8} - \frac{\sqrt[4]{x}}{4} + \frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt{x}}{8} - \frac{\sqrt[4]{x}}{4} + \frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C.$$

★

Ejemplo 163 *: Demuestre que* $e^p(q-p) < e^q - e^p < e^q(q-p)$, *si* $p < q$.

Demostración : Consideremos la función $f(x) = e^x$ definida en el intervalo cerrado $[p,q]$. Puesto que, la función f es continua en todo su dominio y en particular en el intervalo $[p,q]$ y es diferenciable en el intervalo abierto (p,q), entonces el Teorema del valor medio para derivada garantiza que existe un valor $c \in (p,q)$, tal que

$$\frac{e^q - e^p}{q-p} = f'(c) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{e^q - e^p}{q-p} = e^c,$$

ya que, $f'(x) = e^x$.

Por otra parte, como $c \in (p,q)$, entonces

$$p < c < q$$

y en virtud que, la función exponencial natural es una función creciente en todo su dominio, entonces, al aplicar exponencial natural en la desigualdad, la misma no cambia y se obtiene

$$e^p < e^c < e^q,$$

de aquí,

$$e^p < \frac{e^q - e^p}{q-p} < e^q,$$

como $q - p > 0$, (ya que, $p < q$), al multiplicar la desigualdad por $q-p$ la misma no cambia y concluimos que

$$e^p(q-p) < e^q - e^p < e^q(q-p).$$

★

Ejemplo 164 *: Demostrar la siguiente identidad hiperbólica*

$$\operatorname{senh}(2x) = 2\ \operatorname{senh} x\ \cosh x.$$

Demostración : Es conocido que

$$\operatorname{senh}(\cdot) = \frac{e^{(\cdot)} - e^{-(\cdot)}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{senh}(2x) = \frac{e^{(2x)} - e^{-(2x)}}{2},$$

lo cual se puede escribir como,

$$\operatorname{senh}(2x) = \frac{e^{(2x)} - e^{-(2x)}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2},$$

multiplicamos y dividimos por 2,

$$\operatorname{senh}(2x) = 2\ \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2 \cdot 2} = 2\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \operatorname{senh} x\ \cosh x,$$

es decir,

$$\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x\ \cosh x$$

★

Ejemplo 165 *: Demostrar la identidad hiperbólica*

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha)\ \cosh(\beta) + \operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta).$$

Demostración : Es conocido que

$$\cosh(\cdot) = \frac{e^{(\cdot)} + e^{-(\cdot)}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cosh(\alpha + \beta) = \frac{e^{(\alpha+\beta)} + e^{-(\alpha+\beta)}}{2},$$

lo cual se puede escribir como,

$$\begin{aligned}
\cosh(\alpha + \beta) &= \frac{e^{(\alpha+\beta)} + e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \frac{e^{\alpha}\ e^{\beta} + e^{-\alpha}\ e^{-\beta}}{2} = \frac{2\left(e^{\alpha}\ e^{\beta} + e^{-\alpha}\ e^{-\beta}\right)}{4} \\
&= \frac{e^{\alpha}\left(2e^{\beta} + e^{-\beta} - e^{-\beta}\right) + e^{-\alpha}\left(2e^{-\beta} + e^{\beta} - e^{\beta}\right)}{4} \\
&= \frac{e^{\alpha}\left(e^{\beta} + e^{-\beta} + e^{\beta} - e^{-\beta}\right) + e^{-\alpha}\left(e^{-\beta} + e^{\beta} + e^{-\beta} - e^{\beta}\right)}{4} \\
&= \frac{e^{\alpha}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right) + e^{\alpha}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) + e^{-\alpha}\left(e^{-\beta} + e^{\beta}\right) + e^{-\alpha}\left(e^{-\beta} - e^{\beta}\right)}{4} \\
&= \frac{e^{\alpha}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right) + e^{\alpha}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) + e^{-\alpha}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right) - e^{-\alpha}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)}{4} \\
&= \frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right) + (e^{\alpha} - e^{-\alpha})\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)}{4} \\
&= \frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right)}{4} + \frac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)}{4} \\
&= \frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})}{2}\frac{\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right)}{2} + \frac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{2}\frac{\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)}{2} = \cosh(\alpha)\ \cosh(\beta) + \operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha)\ \cosh(\beta) + \operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta).$$

★

Ejemplo 166 *: Demostrar la siguiente identidad hiperbólica*

$$\operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta) = \frac{\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta)}{2}.$$

Demostración : Es conocido que

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha)\ \cosh(\beta) + \operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta)$$

y

$$\cosh(\alpha-\beta)=\cosh(\alpha)\ \cosh(\beta)-\operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta),$$

entonces

$$(-1)\begin{cases}\cosh(\alpha-\beta)=\cosh(\alpha)\ \cosh(\beta)-\operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta)\\ \cosh(\alpha+\beta)=\cosh(\alpha)\ \cosh(\beta)+\operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta)\end{cases}$$

$$\cosh(\alpha+\beta)-\cosh(\alpha-\beta)=2\operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta),$$

de aquí, se obtiene la identidad hiperbólica

$$\operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta)=\frac{\cosh(\alpha+\beta)-\cosh(\alpha-\beta)}{2}.$$

★

Ejemplo 167 *: Demostrar la siguiente identidad hiperbólica*

$$\tanh(\ln x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Demostración : Es conocido que

$$\tanh(\cdot)=\frac{\operatorname{senh}(\cdot)}{\cosh(\cdot)}=\frac{e^{(\cdot)}-e^{-(\cdot)}}{e^{(\cdot)}+e^{-(\cdot)}}\qquad\Longrightarrow\qquad\tanh(\ln x)=\frac{e^{(\ln x)}-e^{-(\ln x)}}{e^{(\ln x)}+e^{-(\ln x)}},$$

como las funciones logaritmo natural y exponencial natural son inversas entre sí, se tiene que si $x\in(0,\infty)$

$$e^{\ln x}=x,\qquad\text{mientras que}\qquad e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=x^{-1}=\frac{1}{x},$$

así,

$$\tanh(\ln x)=\frac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x^2+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Por lo tanto,

$$\tanh(\ln x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

★

Ejemplo 168 *: Si* $x=\ln(\sec\theta+\tan\theta)$, *demuestre que* $\sec\theta=\cosh x$.

Demostración : Como $x=\ln(\sec\theta+\tan\theta)$, aplicando la función inversa de la función logaritmo natural, es decir, la función exponencial natural, se tiene

$$x=\ln(\sec\theta+\tan\theta)\qquad\Longrightarrow\qquad e^x=e^{\ln(\sec\theta+\tan\theta)}\qquad\Longrightarrow\qquad e^x=\sec\theta+\tan\theta,$$

de aquí,

$$\begin{aligned}e^x=\sec\theta+\tan\theta=\frac{(\sec\theta+\tan\theta)^2}{\sec\theta+\tan\theta}&=\frac{\sec^2\theta+2\sec\theta\ \tan\theta+\tan^2\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{\sec^2\theta+2\sec\theta\ \tan\theta+\sec^2\theta-1}{\sec\theta+\tan\theta}\\&=\frac{2\sec^2\theta+2\sec\theta\ \tan\theta-1}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{2\sec^2\theta+2\sec\theta\ \tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}-\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\\&=\frac{2\sec\theta\ (\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}-\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}=2\sec\theta-\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$e^x=2\sec\theta-\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\qquad\Longrightarrow\qquad e^x+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}=2\sec\theta,$$

pero, como $e^x = \sec\theta + \tan\theta$, tiene que

$$\frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{1}{e^x} = e^{-x},$$

luego

$$2\sec\theta = e^x + \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = e^x + e^{-x} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\sec\theta = e^x + e^{-x}.$$

Así,

$$\sec\theta = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

★

Ejemplo 169 *: Integrar* $\displaystyle\int x \ \operatorname{senh}(\ln x) \ dx.$

Solución : Es conocido que

$$\operatorname{senh}(\cdot) = \frac{e^{(\cdot)} - e^{-(\cdot)}}{2}, \qquad \text{así,} \qquad \operatorname{senh}(\ln x) = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2},$$

puesto que, las funciones exponencial y logaritmo natural son funciones inversas entre sí, es decir,

$$e^{\ln(\cdot)} = (\cdot) \qquad \text{y} \qquad \ln\left(e^{(\cdot)}\right) = (\cdot)$$

se tiene que

$$e^{\ln x} = x,$$

por otra parte, por la propiedad del logaritmo de una potencia, es decir, $\ln a^b = b\ln a$, se obtiene que

$$-\ln x = \ln\left(x^{-1}\right), \qquad \text{por lo tanto,} \qquad e^{-\ln x} = e^{\ln\left(x^{-1}\right)} = x^{-1} = \frac{1}{x},$$

entonces, el seno hiperbólica del logaritmo natural de x se escribe como

$$\operatorname{senh}(\ln x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

de aquí,

$$x\operatorname{senh}(\ln x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$$

Al integrar

$$\int x\operatorname{senh}(\ln x) \ dx = \int \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) \ dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2 - 1\right) \ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + C.$$

Luego,

$$\int x\operatorname{senh}(\ln x) \ dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + C.$$

★

Ejemplo 170 *: Integrar* $\displaystyle\int \sqrt{x} \ \cosh(2\ln x) \ dx.$

Solución : Es conocido que, $2\ln x = \ln\left(x^2\right)$, entonces

$$\cosh(2\ln x) = \cosh\left(\ln\left(x^2\right)\right)$$

y puesto que,

$$\cosh(\cdot) = \frac{e^{(\cdot)} + e^{-(\cdot)}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cosh\left(\ln\left(x^2\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(x^2\right)} + e^{-\ln\left(x^2\right)}}{2},$$

de aquí,

$$\cosh\left(\ln\left(x^2\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(x^2\right)} + e^{-\ln\left(x^2\right)}}{2} = \frac{e^{\ln\left(x^2\right)} + e^{\ln\left(x^{-2}\right)}}{2} = \frac{x^2 + x^{-2}}{2},$$

así,

$$\int \sqrt{x}\ \cosh(2\ln x)\ dx = \int \sqrt{x}\ \frac{x^2 + x^{-2}}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int x^{1/2}\ \left(x^2 + x^{-2}\right) dx = \frac{1}{2}\int \left(x^{5/2} + x^{-3/2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right) + C = \frac{x^{7/2}}{7} - x^{-1/2} + C = \frac{x^{7/2}}{7} - \frac{1}{x^{1/2}} + C = \frac{x^8 - 1}{7\sqrt{x}} + C.$$

Luego,

$$\int \sqrt{x}\ \cosh(2\ln x)\ dx = \frac{x^8 - 1}{7\sqrt{x}} + C.$$

★

Ejemplo 171 *: Integrar* $\displaystyle\int \tanh(\ln x)\ dx.$

Solución : Por el ejemplo anterior (ver ejemplo 167) se tiene que

$$\tanh(\ln x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

con lo que

$$\int \tanh(\ln x)\ dx = \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\ dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1 - 1}{x^2 + 1}\ dx = \int \frac{\left(x^2 + 1\right) - 2}{x^2 + 1}\ dx$$

$$= \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x^2 + 1}\right)\ dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right)\ dx = x - 2\arctan x + C.$$

Luego,

$$\int \tanh(\ln x)\ dx = x - 2\arctan x + C.$$

★

Ejemplo 172 *: Calcular* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x + \operatorname{senh} x}{1 + x^2}\ dx.$

Solución : Puesto que, el intervalo de integración es un intervalo simétrico, es conveniente estudiar la simetría del integrando, es decir, verifiquemos si la función $f(x) = \dfrac{2x + \operatorname{senh} x}{1 + x^2}$ es una función par, una función impar o no presenta simetría, así,

$$f(-x) = \frac{2(-x) + \operatorname{senh}(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{-2x - \operatorname{senh} x}{1 + x^2} = -\frac{2x + \operatorname{senh} x}{1 + x^2} = -f(x),$$

por lo que, la función f es impar, de aquí, concluimos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x + \operatorname{senh} x}{1 + x^2}\ dx = 0.$$

★

Ejemplo 173 *: Graficar la función* $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$, *hallando*

1.	*Dominio*	2.	*Punto de corte con los ejes*	3.	*Valor(es) máximo(s)*
4.	*Valor(es) mínimo(s)*	5.	*Intervalo(s) de decrecimiento*	6.	*Intervalo(s) de crecimiento*
7.	*Concavidad hacia arriba*	8.	*Concavidad hacia abajo*	9.	*Puntos de inflexión*
10.	*Asíntota horizontal*	11.	*Asíntota vertical*	12.	*Asíntota oblicua*

Solución : 1. **Dominio :** La función f tiene sentido cuando $x-1 \neq 0$, así,

$$\text{Dom } f : \mathbb{R} - \{1\}$$

2. **Puntos de cortes con los ejes :**

Eje x **:** Resolvemos la ecuación $\exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 0$, como la función exponencial natural siempre es mayor que cero concluimos que no hay punto de corte con el eje x.

Eje y **:** $y_0 = \exp\left(\dfrac{(0)}{(0)-1}\right) = e^0 = 1$, así, el punto de corte con el eje y es $(0,1)$.

3. – 6. **Monotonía :** Derivamos y estudiamos el signo de la primera derivada

$$f'(x) = \left[\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]' = \exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\left[\frac{x}{x-1}\right]' = \exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\frac{[x]'(x-1) - x\ [x-1]'}{(x-1)^2}$$

$$= \exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right),$$

puesto que, la función exponencial natural siempre es positiva al igual que la expresión $(x-1)^2$, podemos concluir que la primera derivada de f siempre es negativa, por lo tanto,

Creciente en : Ningún intervalo. **Decreciente en :** $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$.

Valor mínimo : No tiene. **Valor máximo :** No tiene.

7. – 9. **Concavidad :** Calculamos la segunda derivada y estudiamos su signo.

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]' = -\left[\frac{1}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]',$$

así,

$$f''(x) = -\left(\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]'\exp\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{1}{(x-1)^2}\left[\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]'\right)$$

$$= -\left[\frac{-2}{(x-1)^3}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{1}{(x-1)^2}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(x-1)^3}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\left[2 + \frac{1}{x-1}\right] = \frac{1}{(x-1)^3}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)\left[\frac{2x-1}{x-1}\right],$$

con lo que,

$$f''(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^4}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right),$$

estudiamos el signo de la segunda derivada, observemos que las expresiones $\exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ y $(x-1)^4$ son siempre positivas, por lo tanto, el signo de f'' vendrá dado por el signo de la expresión $2x-1$, de aquí,

$$2x-1>0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x>\frac{1}{2},$$

entonces, $f''>0$, si $x\in\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)-\{1\}$, luego, $f''<0$, si $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$

$$\textbf{Concava hacia arriba :}\ \left(\frac{1}{2},\infty\right)-\{1\}. \qquad \textbf{Concava hacia abajo :}\ \left(-\infty,\frac{1}{2}\right).$$

$$\textbf{Punto de inflexión :}\ \left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\exp\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{e}\right).$$

10. – 12. **Comportamiento asintótico : Asíntota horizontal :**

$$\lim_{x\to\infty}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}\right),$$

el límite se puede introducir en la función exponencial natural por ser esta una función continua, observemos que el nuevo límite,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} \qquad \text{tiene una indeterminación de la forma } \frac{\infty}{\infty},$$

así, que podemos aplicar la regla de L'Hopital para calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{[x]'}{[x-1]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)=e,$$

de forma análoga,

$$\lim_{x\to-\infty}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)=e$$

por lo tanto, f tiene asíntota horizontal en $y=e$.

Asíntota vertical : Existen un candidato, $x=1$.

Para $x=1$, como la función exponencial es continua, se tiene

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)=\exp\left(\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}\right),$$

donde,

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1} \quad \leftarrow \quad \text{Indefinido},$$

así,

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\,x \begin{array}{l} \nearrow \displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}\,x=-\infty \\ \searrow \displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\,x=\infty. \end{array}$$

entonces,

$$\lim_{x\to1}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)=\exp\left(\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\,x\right) \begin{array}{l} \nearrow \exp\left(\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}\,x\right)=e^{-\infty}=0 \\ \searrow \exp\left(\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\,x\right)=e^{\infty}=\infty, \end{array}$$

luego, $x = 1$ **es** asíntota vertical de f por la derecha.

Asíntota oblicua : Tenemos que

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} = 0,$$

ya que, el numerador tiende a e, cuando $x \to \infty$, mientras que, el denominador tiende a infinito cuando $x \to \infty$, por lo tanto, $m = 0$, así, f no tiene asíntota oblicua, como era de esperarse, ya que, la función tiene asíntota horizontal en el $+\infty$ y en $-\infty$. Un razonamiento análogo para cuando $x \to -\infty$.

Grafica de f

Dominio : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Punto de corte con los ejes : $(0, 1)$

Valor(es) máximo(s) : No tiene

Valor(es) mínimo(s) : No tiene

Intervalo(s) de decrecimiento : $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$

Intervalo(s) de crecimiento : No hay

Concavidad hacia arriba : $\left(\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{1\}$

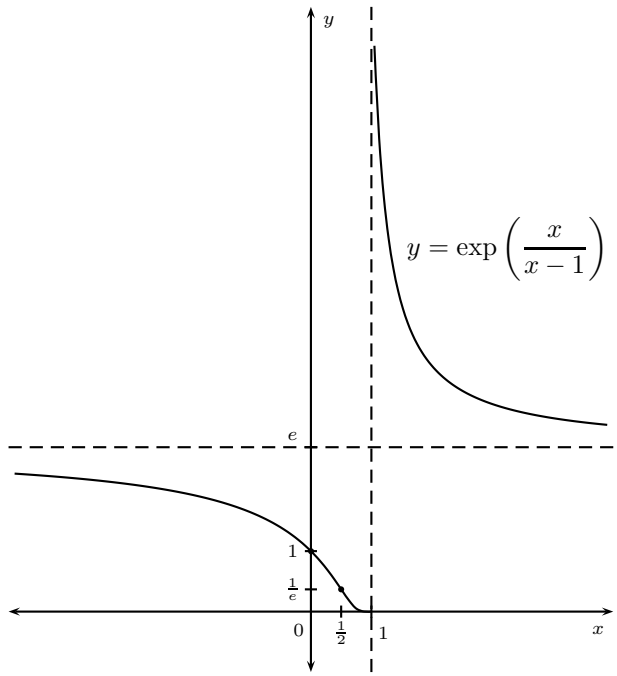
Concavidad hacia abajo : $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Puntos de inflexión : $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$

Asíntota horizontal : $y = e$

Asíntota vertical : $x = 1$

Asíntota oblicua : No hay



★

Ejemplo 174 *: Graficar la función* $f(x) = 3 - |\operatorname{csch}(\ln x) + 2x|$, *hallando*

1. *Dominio*	2. *Punto de corte con los ejes*	3. *Valor(es) máximo(s)*
4. *Valor(es) mínimo(s)*	5. *Intervalo(s) de decrecimiento*	6. *Intervalo(s) de crecimiento*
7. *Concavidad hacia arriba*	8. *Concavidad hacia abajo*	9. *Puntos de inflexión*
10. *Asíntota horizontal*	11. *Asíntota vertical*	12. *Asíntota oblicua*

Solución : Consideremos la función

$$g(x) = \operatorname{csch}(\ln x) + 2x = \frac{1}{\operatorname{senh}(\ln x)} + 2x$$

1. **Dominio :** La función g tiene sentido cuando

Condición 1 (dada por el $\ln(\cdot)$) : $x > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in (0, \infty)$

Condición 2 (dada por la $\operatorname{csch}(\cdot)$) : $\operatorname{senh}(\ln x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$,

Resolvemos la condición 2, se tiene que

$$\operatorname{senh}(\ln x) = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} = \frac{x - e^{\ln x^{-1}}}{2} = \frac{x - x^{-1}}{2} = \frac{x - \frac{1}{x}}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x} \qquad \text{con} \quad x \neq 0,$$

por lo tanto,

$$\operatorname{senh}(\ln x) \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^2-1}{2x} \quad \text{con} \quad x \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \neq \pm 1 \quad \text{y} \quad x \neq 0,$$

así, el dominio de g es $(0,\infty)-\{1\}$, además

$$g(x) = \operatorname{csch}(\ln x) + 2x = \frac{2x}{x^2-1} + 2x = \frac{2x^3}{x^2-1} \qquad \Longrightarrow \qquad g(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$$

2. **Puntos de cortes con los ejes :**

Eje x **:** $\dfrac{2x^3}{x^2-1} = 0 \iff x = 0$, pero $0 \notin \operatorname{Dom} g$, por lo tanto, no hay punto de corte con el eje x.

Eje y **:** Como $0 \notin \operatorname{Dom} g$, no hay punto de corte con el eje y.

3. – 6. **Monotonía :** La derivada de $g(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$, es

$$g'(x) = \left[\frac{2x^3}{x^2-1}\right]' = 2\left[\frac{x^3}{x^2-1}\right]' = 2\,\frac{\left[x^3\right]'\left(x^2-1\right) - x^3\left[x^2-1\right]'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)^2}$$

Estudiamos el signo de g'

	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$
$x+\sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$
g'	$-$	$-$	$+$
g	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Creciente en : $\left(\sqrt{3},\infty\right)$.

Decreciente en : $\left(0,\sqrt{3}\right)-\{1\}$.

Valor mínimo : $\left(\sqrt{3}, g\left(\sqrt{3}\right)\right) = \left(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$.

$$\left[g\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2\left(\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1} + 2\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}\right]$$

Valor máximo : No tiene.

7. – 9. **Concavidad :** La segunda derivada viene dada por

$$g''(x) = \left[\frac{2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)^2}\right]' \qquad \Longrightarrow \qquad g''(x) = \frac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x+1\right)^3\left(x-1\right)^3}$$

Estudiamos el signo de g''

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$4x$	$+$	$+$
x^2+3	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$+$
$(x+1)^3$	$+$	$+$
g''	$-$	$+$
g	$\frown$	$\smile$

Concava hacia arriba : $(1,\infty)$.

Concava hacia abajo : $(0,1)$.

Punto de inflexión : No tiene.

10. – 12. **Comportamiento asintótico :**

Asíntota horizontal :

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2-1},$$

este límite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, así, dividimos entre la mayor potencia, x^3

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^3}{x^3}}{\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{2}{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{(\infty)^3}} = \infty.$$

Luego,

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2-1} = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{no hay} \text{ asíntota horizontal.}$$

Observemos que no se estudia el comportamiento de la función g para cuando $x \to -\infty$, ya que, el dominio de la función es $(0,\infty) - \{1\}$.

Asíntota vertical : Existen dos candidatos, $x = 0$ y $x = 1$

Para $x = 0$, por la derecha.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3}{x^2-1} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{2(0)^3}{(0)^2-1} = 0$$

por lo tanto, $x = 0$ **no es** asíntota vertical.

Para $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^3}{x^2-1} \quad \leftarrow \quad \text{Indefinido,}$$

así,

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)} \frac{2x^3}{x+1} \begin{array}{l} \nearrow \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)} \dfrac{2x^3}{x+1} = -\infty \\ \searrow \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)} \dfrac{2x^3}{x+1} = \infty. \end{array}$$

luego, $x = 1$ **es** asíntota vertical.

Asíntota oblicua : Tenemos que

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^3-x},$$

el cual presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, así, dividimos entre la mayor potencia x^3

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^3}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\dfrac{1}{x^2}} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{2}{1-\dfrac{1}{(\infty)^2}} = 2,$$

por lo que, $m = 2$, mientras que,

$$b = \lim_{x\to\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-1},$$

el cual presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, así, dividimos entre la mayor potencia x^2

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2}{x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{\dfrac{2}{\infty}}{1 - \dfrac{1}{(\infty)^2}} = 0,$$

es decir, $b = 0$. Luego, la recta $y = 2x$ **es** una asíntota oblicua.

Gráfica de g **:** $g(x) = \operatorname{csch}(\ln x) + 2x$.

Dominio : $(0, \infty) \setminus \{1\}$

Punto de corte con los ejes : No hay

Valor(es) máximo(s) : No tiene

Valor(es) mínimo(s) : $\left(\sqrt{3}.3\sqrt{3}\right)$

Intervalo(s) de decrecimiento : $\left(0, \sqrt{3}\right) \setminus \{1\}$

Intervalo(s) de crecimiento : $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$

Concavidad hacia arriba : $(1, \infty)$

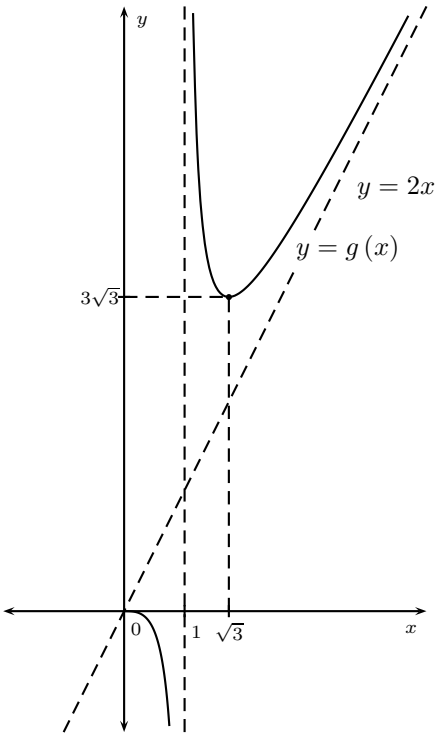
Concavidad hacia abajo : $(-\infty, 1)$

Puntos de inflexión : No tiene

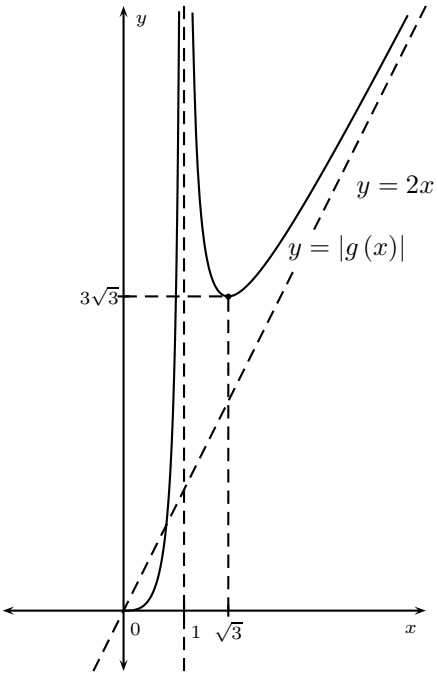
Asíntota horizontal : No hay

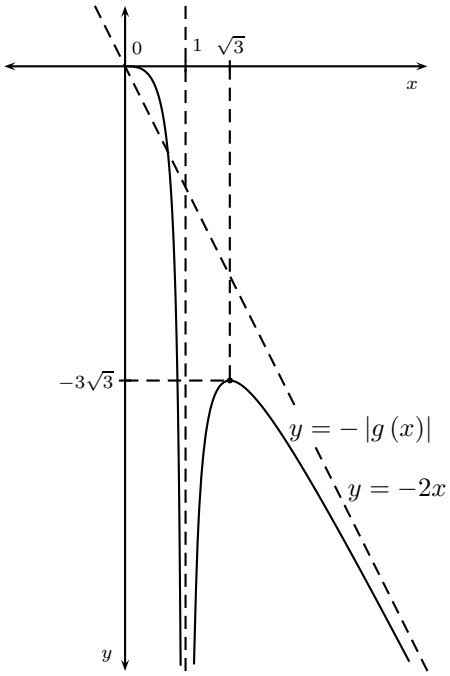
Asíntota vertical : $x = 1$

Asíntota oblicua : $y = 2x$

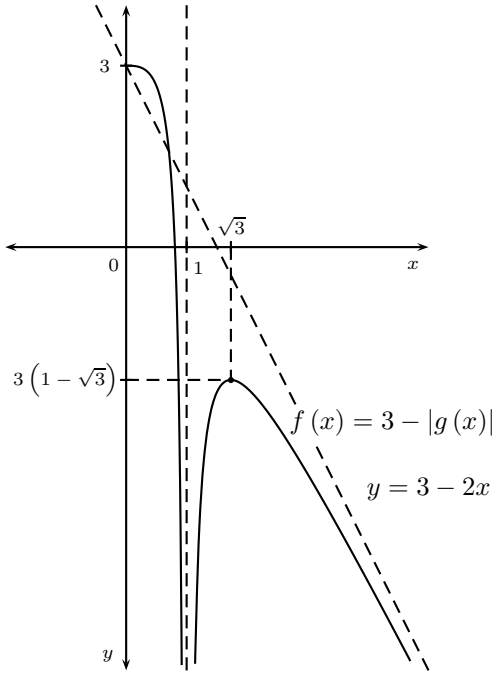


La gráfica de f se obtiene a partir de la gráfica de g de la siguiente manera





Gráfica de f **:** $f(x) = 3 - |\operatorname{csch}(\ln x) + 2x|$.



★

Ejercicios

1. Considere la expresión $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.
   (a) Obtenga el intervalo de definición para f (Dominio)
   (b) Hallar $f(1)$.
   (c) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   (d) Hallar los valores extremos de f.
   (e) Estudiar la concavidad de f.
   (f) Esbozar una gráfica para f.
2. Sea $f(x) = \ln x$, con $x \in \operatorname{Dom} f = (0, \infty)$.
   (a) Demuestre que la función f admite inversa. Dicha inversa se denomina **función exponencial natural** y se denota por $y = e^x$.
   (b) Grafique la función $f^{-1}(x) = e^x$.
3. Demuestre que la primera derivada de la función $f(x) = e^x$, es $f'(x) = e^x$.
4. Resuelva las siguientes ecuaciones

1. $e^{x+1} = 2$	2. $7^{3x(x-1)} = 1$	3. $\ln(x-1)^2 = 2$	4. $\ln(x+1) - \ln(x+3) = \ln 2$
5. $2^{x+1} = 5$	6. $e^{\ln\left(x^4-7\right)} = 9$	7. $\ln\left(\dfrac{t+1}{t^2+1}\right) = 0$	8. $\ln\sqrt{x+1} + \ln\sqrt{x-1} = 0$
9. $3^{x+1} = 81$	10. $\ln^2 x - 4 = 0$	11. $1 + \ln\left(x^2\right) = 0$	12. $\ln x + \ln(x+2) = \ln\left(x^2+4\right)$

13. $e^{2\ln t} = 4$ 14. $e^{\ln\left(x^2+1\right)} = 10$ 15. $\ln\left(e^{x^2-7}\right) = 9$ 16. $\ln(2x+1) = \ln\left(x^2-14\right)$

17. $e^{t^3-4t} = 1$ 18. $8 - \ln^3 x = 0$ 19. $e^{3\ln x} = 8$ 20. $\ln\left(x^2-2\right) - \ln(x+4) = \ln(-x)$

21. $4^{x+6} = 64$ 22. $64 - \ln^2 x = 0$ 23. $3 + \ln\left(x^4\right) = 0$ 24. $\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$

25. $2^{3x+1} = 5$ 26. $e^{\ln\left(x^4+1\right)} = 17$ 27. $\ln\left(e^{13-t^2}\right) = 4$ 28. $5^{|x-1|+|3-x|} = 25$

29. $4^x - 4^{-x} = 2$ 30. $3^{2x+1} = 5^{3x-1}$ 31. $\log_3(x-1) - \log_3(x+2) = 2$

32. $\log_2(x+1) + \log_2(3x-5) = \log_2(5x-3) + 2$ 33. $e^{2x^2-7x+3} = 1$ 34. $2^{3x+1} = 3^{2-x}$

5. Hallar y graficar el conjunto solución en cada caso

1. $3^{x+1} \geq 81$ 2. $2^{x^2-x} < 2^6$ 3. $\ln x^2 - \ln x < 0$ 4. $\ln(x+3) - 1 \geq 0$

5. $7^{3x(x-1)} \leq 1$ 6. $6 + \ln x^3 > 0$ 7. $e^{x+3} - e^{-x} \leq 0$ 8. $\ln\left(x^2+1\right) - \ln x \geq \ln 2$

9. $2^{\left|x^2-2\right|} > 4$ 10. $\ln x^4 \leq \ln x$ 11. $e^{t(t+6)} \geq e^{3+4t}$ 12. $\ln(2x+1) \geq \ln\left(x^2-14\right)$

13. $e^{\sqrt{t^2-t}} > 1$ 14. $8 - \ln^3 x < 0$ 15. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < 27$ 16. $\exp\left(\frac{2}{x-3}\right) - \exp(-x) \geq 0$

17. $5^{t^2-11} > \frac{1}{25}$ 18. $1 - e^{x^2+x} > 0$ 19. $\ln(t-1)^2 < 0$ 20. $\ln\left(x^2+6x\right) \geq \ln(3+4x)$

21. $\ln(x-2) + \ln(x+3) < \ln(x-5)$ 22. $10^{3x-2-x^2} \leq 1$ 23. $\ln 2x < \ln\left(x^2-3x-4\right)$

24. $3^{t^4-3t^2} < \frac{1}{9}$ 25. $\ln\left(e^{t^2+16}\right) \geq 8$ 26. $2\ln(t-1) \leq \ln(t+3) + \ln t$

27. $\ln\left(x^2-2\right) - \ln(x+4) \leq \ln(-x)$ 28. $\frac{2^{\left|x^2+2x-3\right|}}{4^{|x|}} \geq 8$ 29. $\left(\frac{1}{2}\right)^{t^3-4t} \geq 1$

30. $\ln\left(x^2-2\right) \leq \ln(4x-5)$ 31. $5^{|t-1|+|3-t|} > 25$ 32. $\ln x - \ln(x+2) < \ln(x-1)$

33. $\frac{4^{|x+2|}}{2^{|x-1|}} \leq 16$ 34. $\ln\left(t^3+2t^2+t\right) - 2\ln t \geq \ln(t-2)$ 35. $2^{3x+1} < 3^{2-x}$

6. Determine el dominio de la función

1. $f(x) = \ln(x-1)$ 2. $g(x) = \sqrt{1-e^{x^2+x}}$ 3. $h(x) = \sqrt{\ln(x+3)-1}$

4. $g(x) = 2^x + \ln x$ 5. $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{e^x - \ln x}$ 6. $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$

7. $h(x) = \frac{\ln\left(\frac{x-5}{x}\right)}{\ln(x-1)}$ 8. $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$ 9. $f(x) = \frac{\sqrt{e^{x+1}-1}}{\sqrt{1-\ln(x+1)}}$

10. $g(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x^2-9}}$ 11. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\ln x}$ 12. $g(x) = \sqrt{e^{\sqrt{x^2+5x+6}}}$

13. $h(x) = (2-e^x)^{-1}$ 14. $h(t) = \ln\left|9-t^2\right|$ 15. $g(t) = \ln\left(\sqrt[3]{t^2-3}-2\right)$

16. $g(x) = \frac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{x}$ 17. $f(x) = \frac{1}{1-e^{x^2+x}}$ 18. $f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x^2-x}\right)$

19. $f(t) = e^{\sqrt{\ln(-t)}}$ 20. $f(t) = \frac{1}{1-e^{t^2-2t}}$ 21. $g(x) = e^{\ln\left(x^2-x-6\right)}$

22. $h(x) = \ln(3x-2)$ 23. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5x+6}}$ 24. $l(t) = e^{\sqrt{t^2+2t-3}}$

25. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x^3}}{\ln x - 3}$ 26. $f(x) = \dfrac{\ln\left(4-x^2\right)}{\sqrt{e^x-1}}$ 27. $h(t) = \dfrac{\ln\left(5-e^t\right)}{\sqrt[4]{-t}-1}$

28. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2+\ln x}$ 29. $f(t) = \ln\left|2-t^2\right|$ 30. $f(x) = \dfrac{e^x-5^x}{\ln^2 x - 3\ln x + 2}$

31. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{8-x}{x}\right)}{\ln(x-2)}$ 32. $g(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}$ 33. $f(x) = \dfrac{3^x - \ln\left(\sqrt{x-5}\right) - 2}{\sqrt{7-2x}}$

34. $h(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(-x)} - \sqrt{e^{-x}-2}}{\ln|x+2|-1}$ 35. $f(t) = \dfrac{\sqrt{8-t^3}}{\ln(2t-3)}$ 36. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{\ln x - 1}}{e^x - \ln x}$

37. $f(t) = \sqrt{1-e^{t^2-t}}$ 38. $g(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}} + \ln\left(x^2-1\right)}{x^4-16}$ 39. $g(x) = \dfrac{e^{3-x}}{\sqrt{3-\ln(x+2)}}$

40. $h(x) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{\ln x}}-1}{e^{x^2+2x} - e^{3x+6}}$ 41. $f(x) = \exp\left(\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{x^2-x}}\right)$ 42. $h(x) = \dfrac{e^{x+1}}{\sqrt{1-\ln(x+1)}}$

43. $f(x) = \ln\left(1-\sqrt{x+3}\right)$ 44. $g(x) = e^{-x} - \ln\left(x^3-1\right)$ 45. $h(x) = \sqrt{\ln(4+x)-1}$

46. $g(x) = \sqrt{\dfrac{e^{x+1}-1}{1-\ln(x+1)}}$ 47. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-2^{|3x|-|x+1|}}}{e^x - \ln x} - \sqrt[3]{\dfrac{e^x+\sqrt{\ln x}}{4x-x^3}}$

48. $f(x) = \ln\left(\left(x^2-x-6\right)\left(x^3-x\right)\right)$ 49. $f(x) = \ln\left(x^2-x-6\right) + \ln\left(x^3-x\right)$

50. $f(x) = \ln\left(x^2-x-6\right) - \ln\left(x^3-x\right)$ 51. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-x-6}{x^3-x}\right)$

52. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{x}{x-5}\right)}{\ln(4-3x)}$ 53. $f(x) = \dfrac{\ln x - \ln(x-5)}{\ln(4-3x)}$ 54. $f(x) = \dfrac{\ln(4-3x)}{\ln\left(\frac{x-5}{x}\right)}$

55. $f(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)} + \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x^2}{5x+6}\right)$ 56. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - 2^x}\arccos\left(\log\dfrac{x}{x-1}\right)$

57. $f(x) = \dfrac{\ln\left(1-x^2\right) - \ln(x+5)}{\sqrt{x}-x^2}$ 58. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln\left(x^2+6x\right) - \ln(3+4x)}}{8-\ln^3 x}$

59. $g(x) = \sqrt{\ln^2 x - 4}$ 60. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{3^{x+1}-81}}{\ln^2 x - 3\ln x + 2}$ 61. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(2x+1) - \ln(x+3)}}{\sqrt[3]{e^{3\ln x}-8}}$

7. Hallar el rango de las siguientes funciones

1. $f(x) = \ln(2-x) - \ln x$ 2. $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 6$ 3. $f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 6$

4. $f(x) = \dfrac{e^x+5}{e^x}$ 5. $f(x) = \dfrac{3-4e^x}{e^x} + 7$ 6. $f(x) = \ln(3-x) - \ln(1+x)$

8. Demuestre que la primera derivada de la función $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es $f'(x) = a^x \ln a$.

9. Demuestre que la primera derivada de la función $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es $f'(x) = \dfrac{1}{x\ \ln a}$.

10. Demuestre que si $f(x) = \ln|x|$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

11. Demuestre que si $f(x) = \log_a|x|$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x\ \ln a}$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

12. Hallar la primera derivada de las siguientes funciones

1. $f(x) = e^{2x-3}$ 2. $f(x) = \ln(2x-3)$ 3. $f(x) = 3^{\operatorname{sen} x}$ 4. $f(x) = e^{\tan x}\ \ln(\operatorname{sen} x)$

5. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{3^{x^2}}$ 6. $f(x) = \sqrt{\ln x} + \ln(\sqrt{x})$ 7. $f(x) = e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^x}$

8. $f(x) = \dfrac{3^{2^x} - \ln(x+4^x)}{x+1}$ 9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln(e^x-2)}{\sec(e^x-2)}}$ 10. $f(x) = \ln(4^x - 2^x + 1)$

11. $f(x) = e^{\ln^2 x - \ln x + 3}$ 12. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{e^x} + 4\right)$ 13. $f(x) = \log_5(\csc x)\ \ln(e^x - 5^x)$

14. $f(x) = \log_2(3^x - 5) - \log_3(5 - e^x)$ 15. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x\ e^x}{\ln x}\right) - \cos\left(\dfrac{\log_4 x}{x^2\ 5^{\operatorname{sen}(3x)}}\right)$

13. Hallar la primera derivada de las siguientes funciones usando derivación logarítmica

1. $f(x) = x^{3x}$ 2. $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}}$ 3. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$ 4. $f(x) = \left(\ln\left(x^2-5\right)\right)^{2x+3}$

5. $f(x) = 5x^{3\ln x}$ 6. $f(x) = \sqrt{\sec(x^x)}$ 7. $f(t) = \left(\dfrac{\sqrt[5]{te^t}}{\csc t}\right)^{\ln t}$ 8. $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{e^x(x-2)}$

9. $f(t) = \dfrac{e^t\sqrt{t^5+2}}{(t+1)^4(t^2+3)^2}$ 10. $f(x) = \dfrac{\left(x^3+1\right)^4 \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt[3]{x}}$ 11. $f(x) = \dfrac{x^4\sqrt[5]{\operatorname{sen} x}\ln x}{e^x\cos(\ln x)}$

12. $f(x) = \dfrac{3^{\tan x}x^{\cos x}\tan x}{x^3\sqrt{e^{2x}\operatorname{sen} 2x}}$ 13. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}\ln x}{x^3(\cos x)^{x-1}\cot x}$ 14. $f(t) = \left(\dfrac{3^{t^2-7}(\operatorname{sen} t)^{t^2}}{\ln\left(\sqrt{2t}\cos t\right)}\right)^{t^4}$

15. $f(t) = \dfrac{(t+1)^4(t-5)^3}{(t-3)^8} + \left(t^2+1\right)^{\operatorname{sen} t}$ 16. $f(x) = \left(x^4-2\right)^{\tan x} + (\tan x)^{x^4-2}$

17. $f(t) = \sqrt{\dfrac{t^2+1}{t+1}} + \ln\left(\dfrac{\left(t^4+4\right)\sqrt{t^3-1}}{\operatorname{sen}^2 t}\right)$ 18. $f(x) = \left(3x^4 - e^x\right)^{\sqrt{\ln x}} - \dfrac{(\ln x)^{e^x}}{e^x\sqrt[4]{3-x^2}}$

19. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{4x}\sqrt{3-x^4}}{\ln(\cos 3x)}\right) - \left(3^{\sec x}\right)^{x^x}$ 20. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^5\ln(\cos x - 1)}{x^6\operatorname{sen}\sqrt{x}\ln(4\csc x)}\right)$

21. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ 22. $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x^3}{x^4+6} + x\right)$ 23. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x} + 2^{3^x} - x^{\log_3(4x)}$

14. Calcular los siguientes límites, si existen

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{e^{2x}}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{e^x}$ 3. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$ 4. $\displaystyle\lim_{u\to e^2}\frac{\ln^2 u - 4\ln u + 4}{\ln^2 u - 4}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3}{2^x+4}$ 6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{e^{3x}-1}$ 7. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$ 8. $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln(3t-1))$

9. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\ln(x+1) - \ln(x-1))$ 10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right)$ 11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\cos x + \operatorname{sen} x}{1+e^x}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(x^2-2\right) - \ln\left(2x^2+5\right)\right)$ 13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+6e^x-7}{e^x-1}$ 14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+\ln^2 x}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2+e^{-x}\right)$ 16. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+e^{-x}\right)$ 17. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

18. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$ 19. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1+\ln^2 x}$ 20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{2x+1}-3^{x+2}+6}{3^{x+1}-3}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x-\ln(3x-2)+3e^{-x}}{\ln(2x^3+x-2)-\ln(x-2x^2+3x^3)}$ 22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\operatorname{sen} x-3\cos x+4}{3+4^x}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ 24. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{k+2}\right)$ 25. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(e^{-k}-e^{-k-1}\right)$

15. Dado que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

calcular, si existen, los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+5}\right)^x$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2}{ax^2+5}\right)^{x^2}$

16. Escriba como una integral definida el siguiente límite y luego evalue

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{ne^2}\left(e^{6/n}+e^{12/n}+e^{18/n}+e^{24/n}+\cdots+e^2\right).$$

17. Escriba como una integral definida el siguiente límite y luego evalue

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n^2}}{n^2}\left(e^{-2/n^2}+2e^{-5/n^2}+3e^{-10/n^2}+\cdots+ne^{-1-1/n^2}\right).$$

18. Escriba como una integral definida el siguiente límite y luego evalue

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1}+\frac{\ln(n+2)-\ln n}{n+2}+\frac{\ln(n+3)-\ln n}{n+3}+\cdots+\frac{\ln(2)}{2n}\right).$$

19. Demuestre que $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}-\ln(1-e^{-x})$ es una función decreciente para $x>0$.

20. Derive implicitamente, dy/dx, las siguientes curvas

1. $3e^x+xy=40+e^{y^2}$ 2. $x^2y+y^2=\ln(xy)$ 3. $\dfrac{e^{3xy}-e^{x^2}}{x+y}=1$ 4. $e^x=y^2-2^y$

5. $x^4-\dfrac{6x}{\ln y}=y^4-1$ 6. $e^{\sqrt{x}}+e^{\sqrt{y}}=e^{\sqrt{2}}$ 7. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(xy^2\right)}{2^y}=1$ 8. $5e^{xy}=2^{y-1}$

9. $3^x+xy-y^{x^2}=20$ 10. $(3^y-1)^2=4^{(x+2)}$ 11. $y^3+e^y-x\ln\left(x^2y+x^2y^2\right)=y$

12. $e^{x^2+y^2}+2y=x^2$ 13. $\dfrac{\tan(x2^y)}{e^x-e^y}=2^x$ 14. $\dfrac{\ln(e^x+y)}{\log_2 y-2x^3}=e^{xy}$ 15. $\dfrac{\ln y}{\ln x}=\cos e^{xy}$

16. $e^{\sqrt{x}}-e^{x\ln y}+\ln(3-2^y)=2^x$ 17. $\sqrt{\dfrac{\log_3 x-\log_5 y}{5^x-3^y}}=y^4$ 18. $\sqrt{x}\ln y-\sqrt{y}\ln x=e^{xy}$

21. Deduzca la ecuación de la recta tangente a la curva $(x-y)^2=e^{xy}$ en el punto $P(1,0)$.

22. Demuestre que las funciones f y g son funciones inversas entre sí,

    1. $f(x) = \ln(x-1)$ y $g(x) = e^x + 1$
    2. $f(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}\log_3\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)$

23. Considere $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ para a fija, $a > 0$, $a \neq 1$. Demuestre que f tiene inversa y encuentre una fórmula para $y = f^{-1}(x)$.

24. Para las funciones dadas a continuación

    1. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
    2. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
    3. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
    4. $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$
    5. $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
    6. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

    Hallar

    a. Dominio de f
    b. Puntos de cortes
    c. Crecimiento
    d. Decrecimiento
    e. Valor(es) extremo(s)
    f. Concavidad
    g. Punto(s) de inflexión
    h. Asíntota horizontal
    i. Asíntota vertical
    j. Asíntota Oblicua
    k. Grafica de la función f
    l. Existencia función inversa
    m. Dominio de f^{-1}
    n. Función inversa, si existe
    o. Grafica de la función f^{-1}

25. La ecuación $e^x = 1 + x$ evidentemente tiene una raíz, $x = 0$. Demostrar que esta ecuación no puede tener otra raíz real.

26. Demuestre que $e^p(q-p) < e^q - e^p < e^q(q-p)$, si $p < q$.

27. Demuestre que $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, para $x \geq 0$.

28. Demuestre que

    1. $\ln(x) < x$ si $x > 0$
    2. $e^x > 1 + x$, si $x \neq 0$
    3. $e^x > ex$ si $x > 1$.

29. Calcule el c para el cual se tiene que $\ln'(c)$ es igual a la pendiente de la recta que pasa por $(1,0)$ y $(e,1)$.

30. Determine monotonía, valores extremos, concavidad y puntos de inflexión de la función

    1. $h(x) = x - \ln x$
    2. $g(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\sqrt{x}$

31. Graficar las siguientes funciones haciendo el analisis correspondiente

    1. $f(x) = 2^{-x}$
    2. $f(x) = x2^{-x}$
    3. $f(x) = e^{1-x^2}$
    4. $f(x) = \log_2\left(x^2+1\right)$
    5. $f(x) = 3^{x^3-1}$
    6. $f(x) = e^{(x-2)^2}$
    7. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$
    8. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 2}$
    9. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$
    10. $f(t) = \dfrac{2}{\ln t - e^t}$
    11. $f(x) = x\log_2\left(x^2+1\right)$
    12. $f(x) = \log_5\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)$
    13. $f(x) = e^{1/x}$
    14. $f(x) = e^{1/x^2}$

32. Hallar una función f, tal que se cumpla la siguiente igualdad

1. $\int f(x)\,dx = e^x + C$
2. $\int f(x)\,dx = \ln|x| + C$
3. $\int f(x)\,dx = \ln|3x| + C$
4. $\int f(x)\,dx = 3^x + C$
5. $\int f(x)\,dx = \log_a|x| + C$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.
6. $\int f(x)\,dx = a^x + C$
7. $\int f(x)\,dx = \log_a|ax| + C$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.
8. $\int f(t)\,dt = \operatorname{arcsen}\left(2^t\right) + C$
9. $\int f(x)\,dx = \log_a|\operatorname{sen} x| + C$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.
10. $\int f(x)\,dx = \dfrac{4^x + x^4}{7} + C$
11. $\int f(t)\,dt = \dfrac{t^2 + 5^t}{4} + C$
12. $\int f(x)\,dx = \ln|\sec x| + C$
13. $\int f(x)\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$
14. $\int f(x)\,dx = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| + C$

33. Encuentre, en el plano xy, la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(0,-2)$ y cuya pendiente en cada punto es $e^x - 2$.

34. Encuentre una función $y = f(x)$, tal que, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{4x^{3/2}} - \dfrac{1}{x^2}$, f tenga un punto estacionario en $x = 4$ y pase por el punto $(1,-1)$.

35. Calcular las siguientes integrales

1. $\int e^3\,dx$
2. $\int e^{99\ln x}\,dx$
3. $\int e^{7\ln x - 1}\,dx$
4. $\int \dfrac{\ln\left(7e^{t^4}\right)}{t^6}\,dt$
5. $\int \dfrac{1+e^{3t}}{e^t}\,dt$
6. $\int \dfrac{dx}{e^{x+1}}$
7. $\int 5^{x\ln 5}\,dx$
8. $\int \dfrac{t\log_3 t}{\ln\left(\sqrt{t}\right)}\,dt$
9. $\int \dfrac{1-e^x}{1-e^{-x}}\,dx$
10. $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$
11. $\int \dfrac{dx}{3^{2-x}}$
12. $\int \tan x\,dx$
13. $\int 6^{2t/\ln 6}e^{-t}\,dt$
14. $\int \dfrac{\cot(ax)}{\ln(\operatorname{sen}(ax))}\,dx$
15. $\int \dfrac{1-\operatorname{sen} t}{t+\cos t}\,dt$
16. $\int \sqrt{e^t}\,dt$
17. $\int \dfrac{\tan\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,dt$
18. $\int \dfrac{dt}{t\ln^4(3t)}$
19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{e^x}}$
20. $\int \dfrac{\operatorname{sen}(4x)\,dx}{\cos(4x)+4}$
21. $\int \dfrac{x^n\log_n x}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}\,dx$
22. $\int \dfrac{e^{2x}-3e^x}{e^x}\,dx$
23. $\int \dfrac{5e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
24. $\int xe^{x^2}\,dx$
25. $\int \dfrac{5^x-3^x}{4^x}\,dx$
26. $\int \dfrac{a\,dx}{a-x}$
27. $\int ae^{-mt}\,dt$
28. $\int \dfrac{\ln x\,dx}{x}$
29. $\int \dfrac{2t^2+t}{t+1}\,dt$
30. $\int \dfrac{\sqrt{2-e^t}}{e^{-3t}}\,dt$
31. $\int \dfrac{x^3-3x^2}{4-x}\,dx$
32. $\int \dfrac{\cos\left(\ln 4t^2\right)}{t}\,dt$
33. $\int \dfrac{dx}{x\ln\left(x^4\right)}$
34. $\int \dfrac{dx}{1-e^{-3x}}$
35. $\int \dfrac{\ln(\operatorname{sen}(2t))}{\tan(2t)}\,dt$
36. $\int \dfrac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{\operatorname{sen} x}\,dx$
37. $\int \dfrac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$
38. $\int \dfrac{e^{-t}}{7^{-t}}\,dt$
39. $\int \dfrac{dx}{5^{-x}-1}$
40. $\int \dfrac{\operatorname{sen}(2x)\,dx}{e^{-\operatorname{sen}^2 x}}$
41. $\int \dfrac{t^2-3}{1-t}\,dt$
42. $\int \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$
43. $\int \dfrac{e^{3x}-e^{2x}-5e^x+2}{e^{2x}-3e^x+1}\,dx$
44. $\int \dfrac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx$
45. $\int \dfrac{(2e^t+1)\,dt}{e^t-4e^{-t}+1}$

46. $\displaystyle\int \sqrt{7^t}\ dt$ 47. $\displaystyle\int \frac{\log\left(\sqrt{x}\right)-\log_3\left(\sqrt[4]{x}\right)}{\log_5 x}\ dx$ 48. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sec^2 t-1}}{\sqrt[3]{\ln(\sec t)+4}}\ dt$ 49. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$

50. $\displaystyle\int \frac{e^t\ dt}{2-e^t}$ 51. $\displaystyle\int \frac{e^{2x+2}}{e^x}\ dx$ 52. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\arctan(2x)}}{1+4x^2}\ dx$ 53. $\displaystyle\int \frac{\ln(ax)-\ln x}{\csc x}\ dx$

54. $\displaystyle\int \frac{\log_3 x}{x}\ dx$ 55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$ 56. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)\ln(\ln(\ln x))}$ 57. $\displaystyle\int \cot t\ dt$

58. $\displaystyle\int \frac{e^x\ dx}{1+e^{-x}}$ 59. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}+x\ln\left(x^2+1\right)}{1+x^2}\ dx$ 60. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\cos(e^x))\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-x}\sec^2(\cos(e^x))}\ dx$

61. $\displaystyle\int \frac{x^7\ dx}{x^4-1}$ 62. $\displaystyle\int e^x\ 5^{e^x}\ dx$ 63. $\displaystyle\int \frac{x^5\ dx}{x^2-3}$ 64. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3\left(2+\ln(1-t)^2\right)}{1-t}\ dt$

65. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log_5 x}$ 66. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{x^2+1}$ 67. $\displaystyle\int \frac{x^4\log_4 x-\ln x}{\ln\left(\sqrt[4]{x}\right)}\ dx$ 68. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\ dx}{2-\sqrt[3]{x}}$

69. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\ dx}{3\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^3 x+5}$ 70. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\ dx}{5+e^x}$ 71. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log_4 x\log_4(\log_4 x)}$ 72. $\displaystyle\int \sqrt[3]{e^t}\ dt$

73. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt{x}+3}$ 74. $\displaystyle\int \frac{x^3\ dx}{a^2-x^2}$ 75. $\displaystyle\int \sec x\ dx$ 76. $\displaystyle\int \csc x\ dx$ 77. $\displaystyle\int t\ 5^{t^2}\ dt$

78. $\displaystyle\int \frac{7^x-3^{-x}}{2^x}\ dx$ 79. $\displaystyle\int \frac{7^x\ dx}{7^x+5}$ 80. $\displaystyle\int \frac{dx}{7^{-x}+5}$ 81. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}\ dx$

82. $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ 83. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{x-5}}\ dx$ 84. $\displaystyle\int \frac{\ln x+\ln 3}{x\ \ln(3x)}\ dx$ 85. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\ dx$

86. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\,dx}{\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x+2}$ 87. $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x\cos x}\cos(2x)\ dx$ 88. $\displaystyle\int a^{\operatorname{sen} x\cos x}\cos(2x)\ dx$

89. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$ 90. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\ dx$ 91. $\displaystyle\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\ \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\ dx$

92. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ 93. $\displaystyle\int_0^1 t^2\ 2^{-t^3}\ dt$ 94. $\displaystyle\int_e^{e^4}\frac{dx}{x\ \sqrt{\ln x}}$ 95. $\displaystyle\int_{16}^{81}\frac{dt}{\sqrt{t}-\sqrt[4]{t^3}}$

96. $\displaystyle\int \frac{\ln(3x)}{x\ \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}\ dx$ 97. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{2x^2-2x+1}$ 98. $\displaystyle\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-2x+2}$ 99. $\displaystyle\int \frac{e^x\ dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

100. $\displaystyle\int \frac{e^x\ \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\ dx$ 101. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-4x+5}\ dx$ 102. $\displaystyle\int \frac{(2e^t+1)\ dt}{e^t-4e^{-t}+1}$

103. $\displaystyle\int \frac{x^3\ dx}{x^4-4x^2+5}$ 104. $\displaystyle\int \frac{\left(x^3+x\right)dx}{x^4-4x^2+5}$ 105. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ 106. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^x-1}}$

107. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\ dx}{e^{2x}-e^x+1}$ 108. $\displaystyle\int \frac{e^x\left(e^x-2\right)}{e^{2x}-e^x+1}\ dx$ 109. $\displaystyle\int_0^1\left|\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)}\right|dx$

36. Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $f(x)=\displaystyle\int_x^8 \ln\left(e^t+1\right)dt$ 2. $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{e^{2t}-5}{\ln t}dt$ 3. $f(x)=\displaystyle\int_{\ln x}^8 \frac{e^{2t}}{t^2+\ln t}\ dt$

4. $f(x) = \int_{x^2}^{2^x} \frac{\log_2 t}{\sqrt{t}+6}\, dt$ 5. $f(x) = \int_{\operatorname{sen}(\ln x)}^{a^x} \sqrt{\frac{t}{t^2-1}}\, dt$ 6. $f(x) = \int_{e^x}^{\operatorname{sen} x} \frac{5^u + u^2}{\arctan u}\, du$

37. Encuentre el área de la región acotada por $y = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$, $y = 0$, $x = -\ln 5$ y $x = \ln 5$.

38. Encuentre el área de la región acotada por $y = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$, $y = 0$, $x = -8$ y $x = 8$.

39. Encuentre el área de la región acotada por $y = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$, $y = 0$, y $x = \ln 2$.

40. Demuestre las siguientes identidades

1. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ 2. $\cosh(-x) = \cosh x$ 3. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$
4. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$ 5. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x\ \cosh y + \cosh x\ \operatorname{senh} y$
6. $\cosh(x+y) = \cosh x\ \cosh y + \operatorname{senh} x\ \operatorname{senh} y$ 7. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$
8. $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\ \tanh y}$ 9. $\operatorname{senh}(2x) = 2\ \operatorname{senh} x\ \cosh x$
10. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$ 11. $\operatorname{senh}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$
12. $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$ 13. $\tanh(\ln x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 14. $\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$
15. $\operatorname{senh}(\alpha)\ \operatorname{senh}(\beta) = \frac{\cosh(\alpha+\beta) - \cosh(\alpha-\beta)}{2}$
16. $\operatorname{senh}(\alpha)\ \cosh(\beta) = \frac{\operatorname{senh}(\alpha+\beta) + \operatorname{senh}(\alpha-\beta)}{2}$
17. $\cosh(\alpha)\ \cosh(\beta) = \frac{\cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha-\beta)}{2}$
18. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx)$, donde n es cualquier número real.

41. Si $\operatorname{senh} x = \frac{3}{4}$, encuentre los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

42. Si $\tanh x = \frac{4}{5}$, encuentre los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

43. Utilice las definiciones de las funciones hiperbólicas para encontrar los siguientes límites

1. $\lim_{x\to\infty} \tanh x$ 2. $\lim_{x\to-\infty} \tanh x$ 3. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{senh} x$ 4. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x$ 5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$
6. $\lim_{x\to\infty} \coth x$ 7. $\lim_{x\to0^+} \coth x$ 8. $\lim_{x\to0^-} \coth x$ 9. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{csch} x$

44. Demostrar que

1. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$ 2. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$ 3. $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$
4. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$ 5. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$ 6. $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

45. Demostrar que la función seno hiperbólico es continua y creciente en todo su dominio.

46. Demostrar que la función tangente hiperbólico es continua y creciente en todo su dominio.

47. Demostrar que la función coseno hiperbólico es continua en todo su dominio, pero no es monótona en todo su dominio. Encontrar los intervalos en los cuales es creciente y los intervalos en los cuales es decreciente.

48. Hallar las funciones inversas, si existen, de

    1. $f(x) = \operatorname{senh} x$ 2. $f(x) = \cosh x$ 3. $f(x) = \tanh x$ 4. $f(x) = \operatorname{csch} x$
    5. $f(x) = \operatorname{sech} x$ 6. $f(x) = \coth x$

49. Demostrar que

    1. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 2. $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 3. $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}$
    4. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$ 5. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 6. $\dfrac{d}{dx}\coth^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}$

50. Hallar la primera derivada de las siguientes funciones

    1. $f(x) = e^x \operatorname{senh} x$ 2. $f(x) = \tanh(3x)$ 3. $f(x) = \cosh^4 x$
    4. $f(x) = \cosh\left(x^4\right)$ 5. $f(x) = e^{\coth x}$ 6. $f(x) = x^2 \operatorname{sech} x$
    7. $f(t) = \ln(\operatorname{senh} t)$ 8. $f(t) = \tanh\left(e^t\right)$ 9. $f(x) = \cos(\operatorname{senh} x)$
    10. $f(x) = x^{\cosh x}$ 11. $f(x) = \cosh^{-1}\left(x^2\right)$ 12. $f(x) = e^{\tanh x}\cosh(\cosh x)$
    13. $f(x) = e^x \cosh x$ 14. $f(x) = x\ln(\operatorname{senh} 4x)$ 15. $f(x) = x\tanh^{-1} x + \ln\sqrt{1-x^2}$
    16. $f(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ 17. $f(x) = \operatorname{csch}^{-1}\left(x^4\right)$ 18. $f(x) = x\operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right) - \sqrt{9+x^2}$
    19. $f(x) = \coth\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 20. $f(x) = \coth^{-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ 21. $f(x) = \tanh\left(\dfrac{4x+1}{5}\right)$
    22. $f(x) = \ln\left(\operatorname{senh} x^3\right)$ 23. $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{senh}^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$ 24. $f(x) = \tanh^{-1}\left(\operatorname{senh} x^5\right)$
    25. $f(t) = \ln(\tanh t)$ 26. $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ 27. $f(x) = \operatorname{senh}^{-1}\left(\tanh x^2\right)$
    28. $f(x) = x^{\operatorname{senh}\left(\sqrt{x}\right)}$ 29. $f(x) = (\cosh x)^{\tanh x}$ 30. $f(x) = \ln(\coth(3x) - \operatorname{csch}(3x))$

51. Determine en qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1.

52. Si $x = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$, demuestre que $\sec\theta = \cosh x$.

53. Demostrar que una catenaria es cóncava hacia arriba en cada punto.

54. Calcular las siguientes integrales

    1. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 t\, dt$ 2. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(2x)\, dx$ 3. $\displaystyle\int \tanh x\, dx$ 4. $\displaystyle\int \coth t\, dt$ 5. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} x\, dx}{1+\cosh x}$
    6. $\displaystyle\int \tanh^2(3x)\, dx$ 7. $\displaystyle\int t\ \operatorname{senh}^2\left(t^2\right) dt$ 8. $\displaystyle\int x\ \operatorname{senh}(\ln x)\ dx$ 9. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx$
    10. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^4 x\ \cosh x\ dx$ 11. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^4(3x)\, dx$ 12. $\displaystyle\int \cosh^4(7x)\, dx$ 13. $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{senh}^3 x\ dx$
    14. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ \cosh(2\ln x)\ dx$ 15. $\displaystyle\int \tanh x\ \ln(\cosh x)\ dx$ 16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\cosh(\ln x)}\ \operatorname{senh}(\ln x)}{x}\, dx$

17. $\displaystyle\int \tanh(\ln x)\ dx$ 18. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{csch}^2 x}{\tanh x}\ dx$ 19. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cosh^2 x\ dx$ 20. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x+\operatorname{senh} x}{1+x^2}\ dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh}^5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$

55. Resolver las siguientes integrales usando el ejercicio 49

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$ 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2+1}}$ 5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-x^2}$ 7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ 8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ 9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5-2x^2}}$ 10. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$ 12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{6-x}}$ 13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+7}}$ 14. $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{9+2\operatorname{sen}^2 x}}$

56. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{e^x}$.

57. Hallar el área encerrada por las gráficas de las curvas $xy = 9$ y $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 4$.

58. Encontrar el área de la región limitada por la catenaria $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, el eje y, el eje x y la recta $x = x_1$, donde $x_1 > 0$.

59. Calcular el área bajo la gráfica de $y = \cosh x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

60. Obtenga el área de la región comprendida entre la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ y el eje x en $[-1, 1]$.

61. Determine el área de la región limitada por las gráficas de $y = \cosh x$, $y = x$, $x = -1$ y $x = 3$.

62. Considere la función $f(x) = \ln x$, para $0 < x < e$. Definimos la función impar y periódica, de período $2e$.

    (a) Construya su gráfico.

    (b) Calcular $f\left(-\frac{1+4e^2}{e}\right)$.

63. Representar las funciones dadas como composición de funciones básicas e indique en que orden se debe realizar la composición

1. $f(x) = 1 + e^{(x-1)^2}$ 2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4^{x-4}}}$ 3. $f(x) = \ln\left(\operatorname{sen}^2(e^x)\right)$

4. $f(x) = e^{2\cos(\ln x)}$ 5. $f(x) = \operatorname{senh}\left(\cos\left(4^{x^2}\right)\right)$ 6. $f(x) = \log_3\left(1 - \dfrac{5}{\ln(5^{3^x})}\right)$

64. Resolver las siguientes ecuaciones

1. $\coth^2 x + \operatorname{csch}^2 x = 2$ 2. $\operatorname{sech}^2 x - \tanh^2 x = 0$ 3. $\coth x = 3$

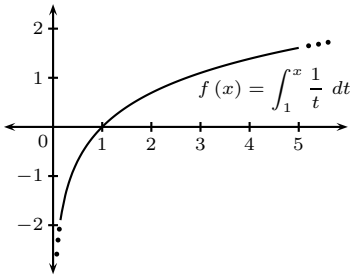
65. Hallar el dominio de la siguiente función

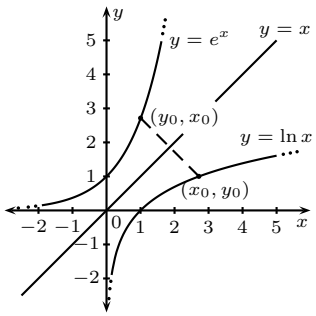
$$f(x) = \log_7\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sech}^{-1} 3x\right).$$

66. Graficar la función $f(x) = 3 - |\operatorname{csch}(\ln x) + 2x|$.

Respuestas: Ejercicios

1.*a*. $(0, \infty)$; 1.*b*. 0; 1.*c*. Monótona creciente; 1.*d*. No tiene valores extremos; 1.*e*. Concava hacia abajo;

1.f. 

; 2.b. 

; 4.1. $\ln 2 - 1$; 4.2. 0 y 1;

4.3. $1 - e$ y $e + 1$; 4.4. $\varnothing$; 4.5. $\log_2 5 - 1$; 4.6. -2 y 2; 4.7. 0 y 1; 4.8. $\sqrt{2}$; 4.9. 3;

4.10. e^{-2} y e^2; 4.11. $e^{-1/2}$; 4.12. 2; 4.13. 2; 4.14. ± 3; 4.15. ± 4; 4.16. 5; 4.17. 0 y ± 2;

4.18. e^2; 4.19. 2; 4.20. $-\sqrt{2} - 1$; 4.21. -3; 4.22. e^{-8} y e^8; 4.23. $e^{-3/4}$; 4.24. e y e^2;

4.25. $\frac{\log_2 5 - 1}{3}$; 4.26. ± 2; 4.27. ± 3; 4.28. $[1, 3]$; 4.29. $\log_4\left(1 + \sqrt{2}\right)$; 4.30. $\frac{\ln 15}{3\ln 5 - 2\ln 3}$; 4.31. $\varnothing$;

4.32. 7; 4.33. $\frac{1}{2}$ y 3; 4.34. $\frac{2\ln 3 - \ln 2}{\ln 24}$; 5.1. $[3, \infty)$; 5.2. $(-2, 3)$; 5.3. $(0, 1)$; 5.4. $[e - 3, \infty)$;

5.5. $[0, 1]$; 5.6. $\left(e^{-2}, \infty\right)$; 5.7. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$; 5.8. $(0, \infty)$; 5.9. $(-\infty, -2) \bigcup (2, \infty)$; 5.10. $[0, 1]$;

5.11. $(-\infty, -3) \bigcup (1, \infty)$; 5.12. $\left(\sqrt{14}, 5\right]$; 5.13. $(-\infty, 0) \bigcup (1, \infty)$; 5.14. $\left(e^2, \infty\right)$; 5.15. $(-\infty, 4)$;

5.16. $[1, 2] \bigcup (3, \infty)$; 5.17. $(-\infty, -3) \bigcup (3, \infty)$; 5.18. $(-1, 0)$; 5.19. $(0, 2)$; 5.20. $[1, \infty)$; 5.21. $\varnothing$;

5.22. $(-\infty, 1) \bigcup (2, \infty)$; 5.23. $\left(\frac{\sqrt{41}+5}{2}, \infty\right)$; 5.24. $\left(-\sqrt{2}, -1\right) \bigcup \left(1, \sqrt{2}\right)$; 5.25. $[-2, \infty)$; 5.26. $(1, \infty)$;

5.27. $\left[-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2}\right)$; 5.28. $\left(-\infty, -\sqrt{10} - 2\right] \bigcup \left[\sqrt{6}, \infty\right) \bigcup \{0\}$; 5.29. $[-2, 0] \bigcup [2, \infty)$; 5.30. $\left(\sqrt{2}, 3\right]$;

5.31. $(-\infty, 1) \bigcup (3, \infty)$; 5.32. $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$; 5.33. $\left[-9, \frac{1}{3}\right]$; 5.34. $(2, \infty)$; 5.35. $\left(-\infty, \frac{2\ln 3 - \ln 2}{\ln 24}\right)$;

6.1. $(1, \infty)$; 6.2. $[-1, 0]$; 6.3. $[e - 3, \infty)$; 6.4. $(0, \infty)$; 6.5. $[e, \infty)$; 6.6. $(-\infty, -3) \bigcup (2, \infty)$;

6.7. $(5, \infty)$; 6.8. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; 6.9. $(-1, e - 1)$; 6.10. $(3, \infty)$; 6.11. $[0, \infty) \setminus \{e\}$; 6.12. $(-\infty, -3] \bigcup [-2, \infty)$;

6.13. $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$; 6.14. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$; 6.15. $\left(-\infty, -\sqrt{11}\right) \bigcup \left(\sqrt{11}, \infty\right)$; 6.16. $(-\infty, -1] \bigcup (0, \infty)$; 6.17. $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$;

6.18. $(0, 1) \bigcup (5, \infty)$; 6.19. $(-\infty, -1]$; 6.20. $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; 6.21. $(-\infty, -2) \bigcup (3, \infty)$; 6.22. $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$;

6.23. $(-\infty, -3] \bigcup [-2, \infty)$; 6.24. $(-\infty, -3] \bigcup [1, \infty)$; 6.25. $\left(0, \sqrt[3]{2}\right]$; 6.26. $(0, 2)$; 6.27. $(-\infty, 0] \setminus \{-1\}$;

6.28. $(0, \infty) \setminus \left\{e^{-2}\right\}$; 6.29. $\mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$; 6.30. $(0, \infty) \setminus \left\{e, e^2\right\}$; 6.31. $(2, 8) - \{3\}$; 6.32. $(1, \infty)$;

6.33. $\varnothing$; 6.34. $(-\infty, -1] - \{-e - 2, -2\}$; 6.35. $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$; 6.36. $[e, \infty)$; 6.37. $[0, 1]$; 6.38. $(1, \infty) \setminus \{2\}$;

6.39. $\left(-2, e^3 - 2\right)$; 6.40. $[1, \infty) \setminus \{3\}$; 6.41. $(-\infty, 0) \bigcup (1, 2]$; 6.42. $(-1, e - 1)$; 6.43. $[-3, -2)$;

6.44. $(1, \infty)$; 6.45. $[e - 4, \infty)$; 6.46. $(-1, e - 1)$; 6.47. $\left[1, \frac{3}{2}\right]$; 6.48. $(-2, -1) \bigcup (0, 1) \bigcup (3, \infty)$;

6.49. $(3, \infty)$; 6.50. $(3, \infty)$; 6.51. $(-2, -1) \bigcup (0, 1) \bigcup (3, \infty)$; 6.52. $(-\infty, 0)$; 6.53. $\varnothing$; 6.54. $(-\infty, 0)$;

6.55. $(2, 6]$; 6.56. $(-\infty, -2]$; 6.57. $(0, 1)$; 6.58. $(-\infty, -6)$; 6.59. $\left(0, e^{-2}\right) \bigcup \left(e^2, \infty\right)$;

6.60. $[3, \infty) \setminus \left\{e^2\right\}$; 6.61. $(2, \infty)$; 7.1. $\mathbb{R}$; 7.2. $[5, \infty)$; 7.3. $[5, \infty)$; 7.4. $(1, \infty)$; 7.5. $(3, \infty)$;

7.6. $\mathbb{R}$; 12.1. $2e^{2x-3}$; 12.2. $\frac{2}{2x-3}$; 12.3. $3^{\operatorname{sen} x} \ln 3 \cos x$; 12.4. $(\ln(\operatorname{sen} x))\, e^{\tan x} \sec^2 x + e^{\tan x} \cot x$;

12.5. $\frac{\cos(\ln x) - 2x^2 \operatorname{sen}(\ln x) \ln 3}{3^{x^2} x}$; 12.6. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} + \frac{1}{2x}$; 12.7. $\frac{1}{2}\sqrt{e^x} + \frac{e\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$;

12.8. $\frac{1}{x+1}\left((\ln 2 \ln 3)\, 2^x\ 3^{2^x} - \frac{1}{x+4^x}\left((\ln 4)\, 4^x + 1\right)\right) - \frac{1}{(x+1)^2}\left(3^{2^x} - \ln\left(x + 4^x\right)\right)$;

12.9. $\frac{1}{2\sqrt{\ln(e^x-2)\cos(e^x-2)}}\left(-e^x \ln\left(e^x - 2\right) \operatorname{sen}\left(e^x - 2\right) + \frac{e^x}{e^x-2}\cos\left(e^x - 2\right)\right)$; 12.10. $\frac{1}{4^x - 2^x + 1}\left(4^x \ln 4 - 2^x \ln 2\right)$;

12.11. $e^{\ln^2 x - \ln x + 3}\left(\frac{2}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right)$; 12.12. $\frac{1-x}{x+4e^x}$; 12.13. $\log_5(\csc x)\, \frac{e^x - 5^x \ln 5}{e^x - 5^x} - \frac{\cot x}{\ln 5}\ln\left(e^x - 5^x\right)$;

12.14. $\frac{\ln 3}{\ln 2}\frac{3^x}{3^x - 5} + \frac{e^x}{(\ln 3)(5 - e^x)}$; 12.15. $\frac{e^x}{\ln^2 x}(\ln x + x\ln x - 1)\cos\left(\frac{x\ e^x}{\ln x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\log_4 x}{x^2\ 5^{\operatorname{sen}(3x)}}\right)\frac{\frac{1}{\ln 4} - (2 + 3x\cos(3x))\log_4 x}{x^3\ 5^{\operatorname{sen}(3x)}}$;

13.1. $f'(x) = 3x^{3x}(\ln x + 1)$; 13.2. $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\sqrt[3]{x} - 2/3}(lnx + 3)$; 13.3. $f'(x) = (\operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cot x\right)$;

13.4. $f'(x) = \left(\ln\left(x^2 - 5\right)\right)^{2x+3}\left(2\ln\left(\ln\left(x^2 - 5\right)\right) + \frac{2x}{\ln\left(x^2-5\right)}\frac{2x+3}{x^2-5}\right)$; 13.5. $f'(x) = 30x^{3\ln x - 1}\ln x$;

13.6. $f'(x) = \frac{1}{2}x^x\sqrt{\sec\left(x^x\right)}\tan\left(x^x\right)(\ln x + 1)$; 13.7. $f'(t) = \left(\frac{\sqrt[5]{te^t}}{\csc t}\right)^{\ln t}\left(\frac{2}{5t}\ln t + \frac{2}{5} + \frac{\ln(\operatorname{sen} t)}{t} + \ln t\ \cot t\right)$;

13.8. $f'(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{e^x(x-2)}\left(\frac{1}{x} + \cot x - 1 - \frac{1}{x-2}\right)$; 13.9. $f'(t) = \frac{e^t\sqrt{t^5+2}}{(t+1)^4\left(t^2+3\right)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{5t^4}{t^5+2} - \frac{4}{t+1} - \frac{4t}{t^2+3}\right)$;

13.10. $f'(x) = \frac{\left(x^3+1\right)^4 \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{12x^2}{x^3+1} + 2\cot x - \frac{1}{3x}\right)$; 13.11. $f'(x) = \frac{x^4\sqrt[5]{\operatorname{sen} x}\ln x}{e^x\cos(\ln x)}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{5}\cot x + \frac{1}{x\ln x} - 1 + \frac{\tan(\ln x)}{x}\right)$;

13.12. $f'(x) = \frac{3^{\tan x}x^{\cos x\tan x}}{x^3\sqrt{e^{2x}\operatorname{sen} 2x}}\left(\ln 3\cdot\sec^2 x - \operatorname{sen} x\ln x + \frac{\cos x}{x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{3}{x} - 1 - \cot 2x\right)$;

13.13. $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}\ln x}{x^3(\cos x)^{x-1}\cot x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x + \frac{1}{x\ln x} - \frac{3}{x} - \ln(\cos x) + x\tan x + \cot x\right)$;

13.14. $f'(t) = \left(\frac{3^{t^2-7}(\operatorname{sen} t)^{t^2}}{\ln\left(\sqrt{2t}\cos t\right)}\right)^{t^4}\left(4t^3\ln\left(\frac{3^{t^2-7}(\operatorname{sen} t)^{t^2}}{\ln\left(\sqrt{2t}\cos t\right)}\right) + t^4\left((2\ln 3)t + 2t\ln(\operatorname{sen} t) + t^2\cot t - \frac{1}{\frac{1}{2}\ln(2t)+\ln\cos t}\left(\frac{1}{t} - \tan t\right)\right)\right)$;

13.15. $f'(t) = \frac{(t+1)^4(t-5)^3}{(t-3)^8}\left(\frac{4}{t+1} + \frac{3}{t-5} - \frac{8}{t-3}\right) + \left(t^2+1\right)^{\operatorname{sen} t}\left(\cos t\ln\left(t^2+1\right) + \frac{2t\operatorname{sen} t}{t^2+1}\right)$;

13.16. $f'(x) = \left(x^4-2\right)^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln\left(x^4-2\right) + \frac{4x^3\tan x}{x^4-2}\right) + (\tan x)^{x^4-2}\left(4x^3\ln(\tan x) + \left(x^4-2\right)\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)$;

13.17. $f'(t) = \sqrt{\frac{t^2+1}{t+1}}\left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right) + \frac{4t^3}{t^4+4} + \frac{1}{2}\frac{3t^2}{t^3-1} - 2\cot t$;

13.18. $f'(x) = \left(3x^4-e^x\right)^{\sqrt{\ln x}}\left(\frac{\ln\left(3x^4-e^x\right)}{2x\sqrt{\ln x}} + \sqrt{\ln x}\ \frac{12x^3-e^x}{3x^4-e^x}\right) - \frac{(\ln x)^{e^x}}{e^x\sqrt[4]{3-x^2}}\left(e^x\ln(\ln x) + \frac{e^x}{x\ln x} - 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{3-x^2}\right)$;

13.19. $f'(x) = 4 - \frac{2x^3}{3-x^4} + \frac{3\tan 3x}{\ln(\cos 3x)} - \left(3^{\sec x}\right)^{x^x}\ln\left(3^{\sec x}\right)^{x^x}(\ln x + 1 + \tan x)$;

13.20. $f'(x) = \exp\left(\frac{\ln(\cos x-1)}{x\operatorname{sen}\sqrt{x}\ln(4\csc x)}\right)\frac{\ln(\cos x-1)}{x\operatorname{sen}\sqrt{x}\ln(4\csc x)}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x-1)\ln(\cos x-1)} - \frac{1}{x} - \frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\cot x}{\ln(4\csc x)}\right)$;

13.21. $x^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x\ \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right]$; 13.22. $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{10x+4x^3}{5x^2+x^4+6} - \frac{4x^3}{x^4+6}$;

13.23. $f'(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}\left[\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x} + \ln x\ \cot x\right] + 2^{3^x}3^x\ln 2\ \ln 3 - x^{\log_3(4x)}\left[\frac{\ln x}{x\ln 3} + \frac{\log_3(4x)}{x}\right]$; 14.1. 0; 14.2. 0;

14.3. e^x; 14.4. 0; 14.5. 0; 14.6. $\frac{1}{3}$; 14.7. $a^x\ln a$; 14.8. $-\ln 3$; 14.9. 0; 14.10. 0; 14.11. 0;

14.12. $-\ln 2$; 14.13. 8; 14.14. 0; 14.15. ∞; 14.16. ∞; 14.17. $\frac{1}{x}$; 14.18. $\frac{1}{x\ln a}$; 14.19. 0;

14.20. -1; 14.21. $\frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2}$; 14.22. 0; 14.23. ∞; 14.24. $-\infty$; 14.25. e^{-1}; 15.1. e; 15.2. e^{-1};

15.3. e^{-5}; 15.4. e^3; 15.5. e^2; 15.6. e^a; 15.7. $e^{-5/3}$; 15.8. $e^{-5/a}$; 16. $\int_{-1}^{2} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^{-2}$;

17. $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-1}$; 18. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 2$; 20.1. $y' = \frac{3e^x+y}{2ye^{y^2}-x}$; 20.2. $y' = \frac{y\left(1-2x^2y\right)}{x\left(x^2y+2y^2-1\right)}$;

20.3. $y' = \frac{1-3ye^{3xy}+2xe^{x^2}}{3xe^{3xy}-1}$; 20.4. $y' = \frac{e^x}{2y-2^y\ln 2}$; 20.5. $y' = \frac{4x^3y\ln^2 y-6y\ln y}{4y^4\ln^2 y-6x}$; 20.6. $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

20.7. $y' = \frac{y^2\cos\left(xy^2\right)}{2^y\ln 2-2xy\cos\left(xy^2\right)}$; 20.8. $y' = \frac{5ye^{xy}}{2^{y-1}\ln 2-5xe^{xy}}$; 20.9. $y' = \frac{2xy^{x^2}\ln y-3^x\ln 3-y}{x\left(1-xy^{x^2-1}\right)}$; 20.10. $y' = \frac{4^{(x+2)}\ln 4}{2(3^y-1)3^y\ln 3}$;

20.11. $y' = \frac{y(y+1)\left(2\ln\left(x^2y+x^2y^2\right)+2\right)}{y(y+1)\left(3y^2-e^y-1\right)-x(1+2y)}$; 20.12. $y' = -x$; 20.13. $y' = \frac{2^xe^x(1+\ln 2)-2^xe^y\ln 2-2^y\sec^2\left(x2^y\right)}{x2^y\sec^2\left(x2^y\right)\ln 2+2^xe^y}$;

20.14. $y' = \left(ye^{xy} - \frac{1}{\log_2 y-2x^3}\frac{e^x}{e^x+y} - \frac{6x^2\ln\left(e^x+y\right)}{\left(\log_2 y-2x^3\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\log_2 y-2x^3}\frac{1}{e^x+y} - \frac{\ln\left(e^x+y\right)}{\left(\log_2 y-2x^3\right)^2}\frac{1}{y\ln 2} - xe^{xy}\right)^{-1}$;

20.15. $y' = -\left(y\operatorname{sen} e^{xy} + \frac{\ln y}{x\ln^2 x}\right)\left(\frac{1}{y\ln x} + x\operatorname{sen} e^{xy}\right)^{-1}$; 20.16. $y' = \left(2^x\ln 2 - \frac{e\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + e^{x\ln y}\ln y\right)\left(\frac{2^y\ln 2}{3-2^y} - \frac{xe^{x\ln y}}{y}\right)^{-1}$;

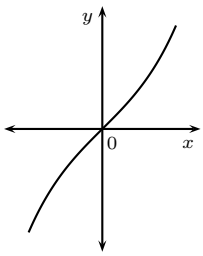
20.17. $y' = \left(\frac{1}{x(5^x-3^y)\ln 3} - \frac{5^x(\log_3 x-\log_5 y)\ln 5}{(5^x-3^y)^2}\right)\left(8y^7 + \frac{1}{y(5^x-3^y)\ln 5} - \frac{3^y(\log_3 x-\log_5 y)\ln y}{(5^x-3^y)^2}\right)^{-1}$;

20.18. $y' = \left(ye^{xy} - \frac{\ln y}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{\ln x}{2\sqrt{y}} - xe^{xy}\right)^{-1}$; 21. $3y-2x+2=0$; 23. $f^{-1}(x) = \log_a\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$;

24.1.a. $\mathbb{R}$; 24.1.b. $(0,0)$; 24.1.c. $\mathbb{R}$; 24.1.d. $\varnothing$; 24.1.e. Valor máximo: No tiene, Valor mínimo: No tiene;

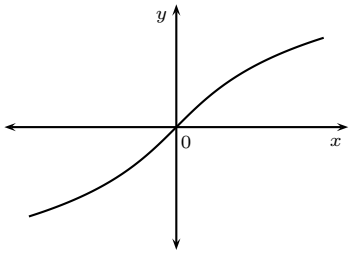
24.1.f. Concava hacia arriba: $(0,\infty)$, Concava hacia abajo: $(-\infty,0)$; 24.1.g. $(0,0)$; 24.1.h. No tiene;

24.1.i. No tiene; 24.1.j. No tiene; 24.1.k.



$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

; 24.1.l. Si tiene; 24.1.m. $\mathbb{R}$;

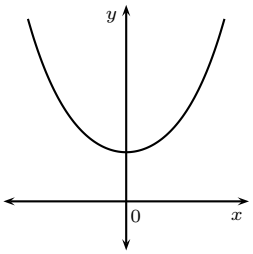
24.1.n. $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$; 24.1.$o$. 

; 24.2.a. $\mathbb{R}$; 24.2.b. $(0,1)$;

$f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

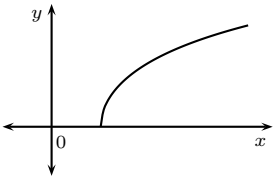
24.2.c. $(0,\infty)$; 24.2.d. $(-\infty,0)$; 24.2.e. Valor máximo: No tiene, Valor mínimo: $(0,1)$;

24.2.f. Concava hacia arriba: $\mathbb{R}$, Concava hacia abajo: $\varnothing$; 24.2.g. No tiene; 24.2.h. No tiene; 24.2.i. No tiene;

24.2.j. No tiene; 24.2.k. 

; 24.2.l. Si tiene; 24.2.m. $[1,\infty)$;

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

24.2.n. $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, con $x \geq 1$; 24.2.o. 

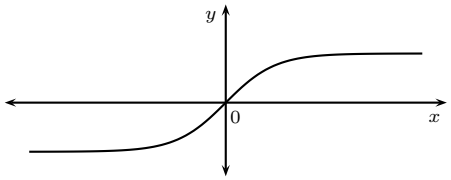
; 24.3.a. $\mathbb{R}$;

$f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

24.3.b. $(0,0)$; 24.3.c. $\mathbb{R}$; 24.3.d. $\varnothing$; 24.3.e. Valor máximo: No tiene, Valor mínimo: No tiene;

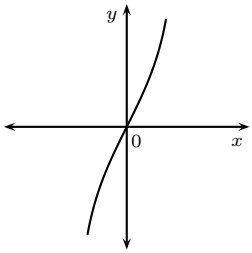
24.3.f. Concavidad hacia arriba: $(-\infty,0)$, Concavidad hacia abajo: $(0,\infty)$; 24.3.g. $(0,0)$;

24.3.h. $y=-1$ si $x \to -\infty$, $y=1$ si $x \to \infty$; 24.3.i. No tiene; 24.3.j. No tiene;

24.3.k. 

; 24.3.l. Si tiene; 24.3.m. $(-1,1)$;

$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

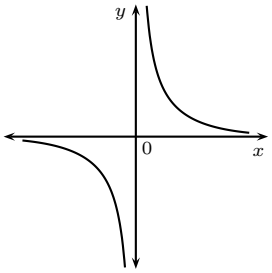
24.3.n. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, con $-1 < x < 1$; 24.3.o. 

; 24.4.a. $\mathbb{R} - \{0\}$;

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

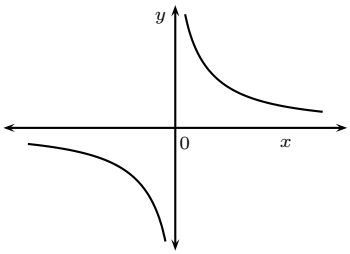
24.4.b. No tiene; 24.4.c. $\varnothing$; 24.4.d. $\mathbb{R} - \{0\}$; 24.4.e. Valor máximo: No tiene, Valor mínimo: No tiene;

24.4.f. Concavidad hacia arriba: $(0,\infty)$, Concavidad hacia abajo: $(-\infty,0)$; 24.4.g. No tiene; 24.4.h. $y=0$;

24.4.i. $x = 0$; 24.4.j. No tiene; 24.4.k. 

; 24.4.l. Si tiene; 24.4.m. $\mathbb{R} - \{0\}$;

$f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

24.4.n. $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$, con $x \neq 0$; 24.4.o. 

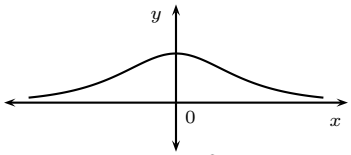
; 24.5.a. $\mathbb{R}$;

$f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$

24.5.b. $(0, 1)$; 24.5.c. $(-\infty, 0)$; 24.5.d. $(0, \infty)$; 24.5.e. Valor máximo: $(0, 1)$, Valor mínimo: No tiene;

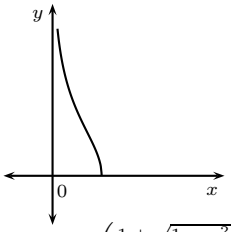
24.5.f. Concavidad hacia arriba: $\left(-\infty, \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right) \bigcup \left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right), \infty\right)$, Concavidad hacia abajo: $\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right), \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$;

24.5.g. $\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 24.5.$h$. $y = 0$; 24.5.i. No tiene; 24.5.j. No tiene;

24.5.k. 

; 24.5.l. Si tiene; 24.5.m. $(0, 1]$;

$f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

24.5.n. $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, con $0 < x \leq 1$; 24.5.o. 

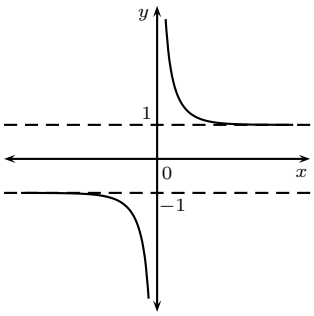
; 24.6.a. $\mathbb{R} - \{0\}$;

$f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

24.6.b. No tiene; 24.6.c. $\varnothing$; 24.6.d. $\mathbb{R} - \{0\}$; 24.6.e. Valor máximo: No tiene, Valor mínimo: No tiene;

24.6.f. Concavidad hacia arriba: $(0, \infty)$, Concavidad hacia abajo: $(-\infty, 0)$; 24.6.g. No tiene;

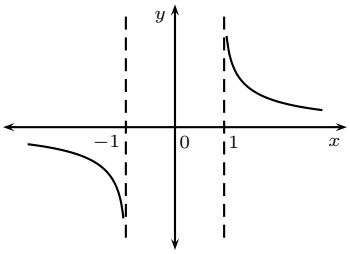
24.6.h. $y = -1$ si $x \to -\infty$, $y = 1$ si $x \to \infty$; 24.6.i. $x = 0$; 24.6.j. No tiene;

24.6.k. 

; 24.6.l. Si tiene; 24.6.m. $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$;

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

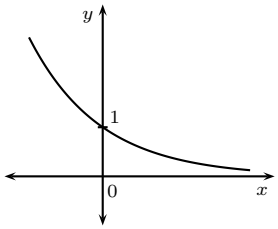
24.6.n. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$, con $|x| > 1$; 24.6.o.



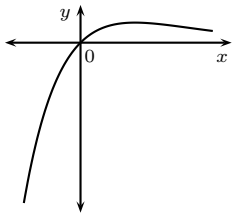
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

; 29. $c = e - 1$;

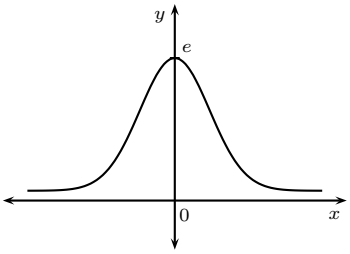
30.1. Crecimiento: $(1, \infty)$, Decrecimiento: $(0, 1)$, Valor máximo: $(1, 1)$, Valor mínimo: No tiene, Concava hacia arriba: $(0, \infty)$, Concava hacia abajo: Nunca, Punto de inflexión: No tiene; 30.2. Crecimiento: $(2, \infty)$, Decrecimiento: $(0, 2)$, Valor máximo: No tiene, Valor mínimo: $\left(2, \frac{1+\ln 2}{2}\right)$, Concava hacia arriba: $(0, 4)$, Concava hacia abajo: $(4, \infty)$, Punto de inflexión: $\left(4, \frac{1}{4} + \ln 2\right)$; 31.1.



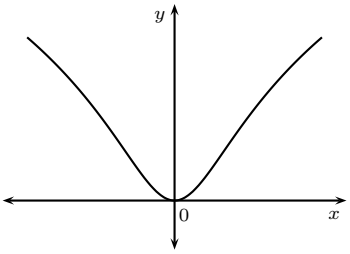
; 31.2.



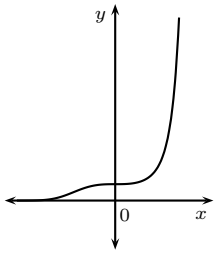
; 31.3.



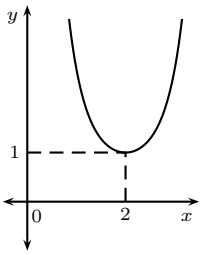
; 31.4.



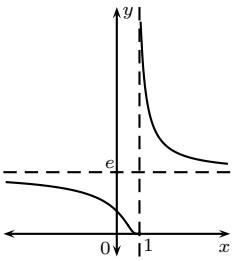
; 31.5.



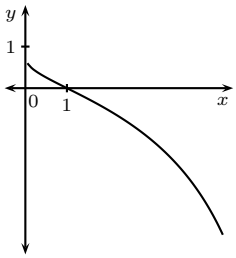
; 31.6.



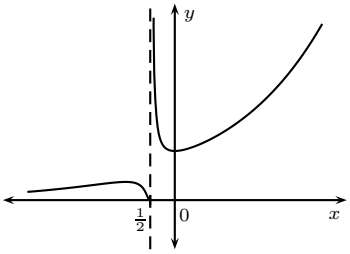
; 31.7.



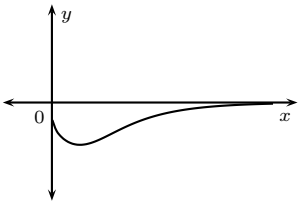
; 31.8.



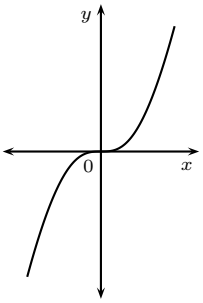
; 31.9.



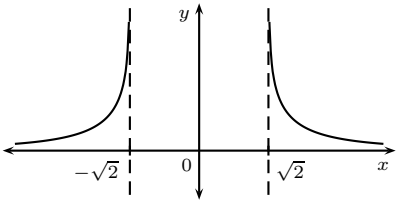
; 31.10.



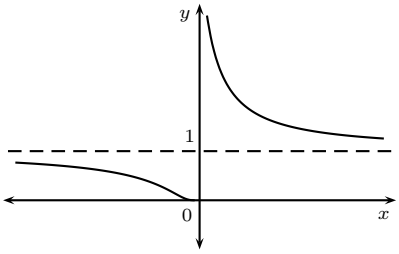
; 31.11.



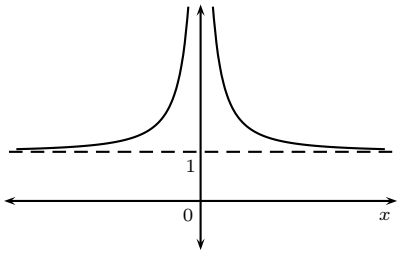
; 31.12.



; 31.13.



;

31.14. 

; 32.1. $f(x) = e^x$; 32.2. $f(x) = \frac{1}{x}$; 32.3. $f(x) = \frac{1}{x}$;

32.4. $f(x) = 3^x \ln 3$; 32.5. $f(x) = \frac{1}{x \ln a}$; 32.6. $f(x) = a^x \ln a$; 32.7. $f(x) = \frac{1}{x \ln a}$; 32.8. $f(t) = \frac{2^t \ln 2}{\sqrt{1-2^{2t}}}$;

32.9. $f(x) = \frac{\cot x}{\ln a}$; 32.10. $f(x) = \frac{4x^3+4^x \ln 4}{7}$; 32.11. $f(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}5^t \ln 5$; 32.12. $f(x) = \tan x$;

32.13. $f(x) = \cot x$; 32.14. $f(x) = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$; 33. $y = e^x - 2x - 3$; 34. $y = \ln|x| - \sqrt{x}$;

35.1. $xe^3 + C$; 35.2. $\frac{1}{100}x^{100} + C$; 35.3. $\frac{1}{8}x^8 e^{-1} + C$; 35.4. $-\frac{\ln 7}{5t^5} - \frac{1}{t} + C$; 35.5. $\frac{1}{2}e^{2t} - e^{-t} + C$;

35.6. $e^{-x-1} + C$; 35.7. $\frac{1}{\ln^2 5}5^{x \ln 5} + C$; 35.8. $\frac{t^2}{\ln 3} + C$; 35.9. $-e^x + C$; 35.10. $\frac{3}{4}(\ln x + 1)^{2/3} + C$;

35.11. $\frac{1}{9 \ln 3}3^x + C$; 35.12. $\ln|\sec x| + C$; 35.13. $e^t + C$; 35.14. $\frac{1}{a}\ln|\ln(\operatorname{sen}(ax))| + C$;

35.15. $\ln|t + \cos t| + C$; 35.16. $2e^{\frac{1}{2}t} + C$; 35.17. $2\ln\left|\tan\sqrt{t}\right| + C$; 35.18. $-\frac{1}{3\ln^3(3t)} + C$;

35.19. $-2e^{-x/2} + C$; 35.20. $-\frac{1}{4}\ln|4 + \cos 4x| + C$; 35.21. $\frac{2x^{n+1}}{(n+1)\ln n} + C$;

35.22. $e^x - 3x + C$; 35.23. $-5\sqrt{1-e^{2x}} + C$; 35.24. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$; 35.25. $\frac{1}{\ln 4 - \ln 3}\left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{1}{\ln 4 - \ln 5}\left(\frac{5}{4}\right)^x + C$;

35.26. $-a\ln|x-a| + C$; 35.27. $-\frac{a}{m}e^{-mt} + C$; 35.28. $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$; 35.29. $t^2 - t + \ln|t+1| + C$;

35.30. $\frac{8}{5}\left(2-e^t\right)^{5/2} - \frac{8}{3}\left(2-e^t\right)^{3/2} - \frac{2}{7}\left(2-e^t\right)^{7/2} + C$; 35.31. $-4x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 16\ln|x-4| + C$;

35.32. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\ln 4t^2\right) + C$; 35.33. $\frac{1}{4}\ln|\ln x| + C$; 35.34. $x + \frac{1}{3}\ln\left|e^{-3x} - 1\right| + C$; 35.35. $\frac{1}{2}\ln^2(\operatorname{sen} 2t) + C$;

35.36. $\ln|\csc x - \cot x| + 2\operatorname{sen} x + C$; 35.37. $\frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{e^x+1} + C$; 35.38. $\frac{7^t}{e^t(\ln 7 - 1)} + C$;

35.39. $-x - \frac{1}{\ln 5}\ln\left|\frac{1}{5^x} - 1\right| + C$; 35.40. $e^{\operatorname{sen}^2 x} + C$; 35.41. $2\ln|t-1| - \frac{t^2}{2} - t + C$; 35.42. $2e^{\sqrt{t}} + C$;

35.43. $e^x + 2x + C$; 35.44. $\frac{3}{4}\ln^{4/3} x + C$; 35.45. $\ln\left|e^t + e^{2t} - 4\right| + C$; 35.46. $\frac{2}{\ln 7}7^{\frac{1}{2}t} + C$;

35.47. $\frac{\ln 5}{\ln 3 \ln 10}\left(\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 10\right)\frac{5x}{2} + C$; 35.48. $\frac{3}{2}(\ln(\sec t) + 4)^{\frac{2}{3}} + C$; 35.49. $\frac{-1}{4\ln^4 x} + C$; 35.50. $-\ln\left|e^t - 2\right| + C$;

35.51. $e^{x+2} + C$; 35.52. $\frac{1}{8}\ln\left(4x^2+1\right) - \frac{1}{3}(\arctan 2x)^{\frac{3}{2}} + C$; 35.53. $-\ln a\ \cos x + C$; 35.54. $\frac{1}{2}\frac{\ln^2 x}{\ln 3} + C$;

35.55. $\ln|\ln(\ln x)| + C$; 35.56. $\ln|\ln(\ln(\ln x))| + C$; 35.57. $\ln|\operatorname{sen} t| + C$; 35.58. $e^x - \ln(e^x+1) + C$;

35.59. $e^{\arctan x} + \frac{1}{4}\ln^2\left(x^2+1\right) + C$; 35.60. $\frac{1}{3}\cos^3(\cos(e^x)) + C$; 35.61. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}\ln\left|x^4 - 1\right| + C$; 35.62. $\frac{1}{\ln 5}5^{e^x} + C$;

35.63. $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{2}\ln\left|x^2 - 3\right| + C$; 35.64. $\frac{1}{2}\cos\left(2 + \ln(1-t)^2\right) - \frac{1}{6}\cos^3\left(2 + \ln(1-t)^2\right) + C$; 35.65. $\ln|\ln x|\ln 5 + C$;

35.66. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$; 35.67. $\frac{4}{5}\frac{x^5}{\ln 4} - 4x + C$; 35.68. $-36\sqrt[3]{x} - 24\ln\left|2 - \sqrt[3]{x}\right| - 9\left(2 - \sqrt[3]{x}\right)^2 + \left(2 - \sqrt[3]{x}\right)^3 + C$;

35.69. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{sen}^3 x - 3\operatorname{sen} x - 5\right| + C$; 35.70. $e^x - 5\ln(e^x+5) + C$; 35.71. $\ln^2 4\ln|\ln(\log_4 x)| + C$; 35.72. $3e^{\frac{1}{3}t} + C$;

35.73. $18\ln\left|\sqrt{x}+3\right| - 12\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}+3\right)^2 + C$; 35.74. $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{a^2}{2}\ln\left|x^2 - a^2\right| + C$; 35.75. $\ln|\sec t + \tan t| + C$;

35.76. $\ln|\csc x - \cot x| + C$; 35.77. $\frac{1}{2\ln 5}5^{t^2} + C$; 35.78. $\frac{1}{6^x \ln 6} + \frac{1}{\ln 7 - \ln 2}\left(\frac{7}{2}\right)^x + C$; 35.79. $\frac{1}{\ln 7}\ln(7^x+5) + C$;

35.80. $\frac{1}{5}x + \frac{1}{5\ln 7}\ln\left(\frac{1}{7^x} + 5\right) + C$; 35.81. $\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$; 35.82. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$; 35.83. $e^{x+5} - xe^5 + C$;

35.84. $\ln|x| + C$; 35.85. $\ln\left|\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2\right| + C$; 35.86. $2\arctan(\operatorname{sen} x - 1) + \ln\left|\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 2\right| + C$;

35.87. $e^{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}} + C$; 35.88. $\frac{1}{\ln a}a^{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}} + C$; 35.89. $2\ln^{1/2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$; 35.90. $2 - \frac{1}{2}\pi$; 35.91. $4 - \pi$;

35.92. $\frac{\sqrt{x}}{8} - \frac{\sqrt[4]{x}}{4} + \frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[4]{x} + 1\right| + C$; 35.93. $\frac{1}{6\ln 2}$; 35.94. 2; 35.95. $-4\ln 2 - 4$; 35.96. $3\ln x + 3\ln|\ln x|\ln 3 + C$;

35.97. $\frac{1}{2}\arctan(2x-1) + \frac{1}{4}\ln\left|2x^2 - 2x + 1\right| + C$; 35.98. $\arctan(1-x) + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 2x + 2\right| + C$; 35.99. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}e^x\right) + C$;

35.100. $2\sqrt{e^x - 1} - 4\arctan\left(\frac{e^x - 1}{2}\right) + C$; 35.101. $5\arctan(x-2) + \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - 4x + 5\right| + C$; 35.102. $\ln\left|e^{2t} + e^t - 4\right| + C$;

35.103. $\arctan\left(x^2 - 2\right) + \frac{1}{4}\ln\left|x^4 - 4x^2 + 5\right| + C$; 35.104. $\frac{3}{2}\arctan\left(x^2 - 2\right) + \frac{1}{4}\ln\left|x^4 - 4x^2 + 5\right| + C$;

35.105. $2\arctan\sqrt{e^x - 1} + C$; 35.106. $\frac{2}{\ln a}\arctan\sqrt{a^x - 1} + C$; 35.107. $\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x} - e^x + 1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2e^x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$;

35.108. $\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x} - e^x + 1\right| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2e^x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$; 35.109. $\ln 3$; 36.1. $f'(x) = -\ln(e^x + 1)$; 36.2. $f'(x) = \frac{e^{2x} - 5}{\ln x}$;

36.3. $f'(x) = \frac{-x}{\ln^2 x + \ln(\ln x)}$; 36.4. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{2^x} + 6}2^x \ln 2 - 2x\frac{\log_2\left(x^2\right)}{|x| + 6}$; 36.5. $f'(x) = \sqrt{\frac{a^x}{a^{2x} - 1}}a^x \ln a - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{\operatorname{sen}^2(\ln x) - 1}}\frac{\cos(\ln x)}{x}$;

36.6. $f'(x) = \frac{5^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen}^2 x}{\arctan(\operatorname{sen} x)} \cos x - \frac{5^{e^x} + e^{2x}}{\arctan(e^x)} e^x$; 37. $A = \frac{312}{25}$; 38. $A = \frac{1}{2}\ln\left(e^{-32}+1\right) - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(e^{32}+1\right)$;

39. $A = \frac{9}{16}$; 41. $\cosh x = \frac{5}{4}$, $\tanh x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{sech} x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{csch} x = \frac{4}{3}$, $\coth x = \frac{5}{3}$; 42. $\cosh x = \frac{5}{3}$, $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$, $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{csch} x = \frac{3}{4}$, $\coth x = \frac{5}{4}$; 43.1. 1; 43.2. -1; 43.3. ∞; 43.4. $-\infty$; 43.5. ∞; 43.6. 1;

43.7. ∞; 43.8. $-\infty$; 43.9. $-\infty$; 48.1. $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$; 48.2. $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, con $x \geq 1$;

48.3. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, con $-1 < x < 1$; 48.4. $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$, con $x \neq 0$;

48.5. $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, con $0 < x \leq 1$; 48.6. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}$, con $|x| > 1$; 50.1. $f'(x) = e^x(\cosh x + \operatorname{senh} x)$;

50.2. $f'(x) = 3\operatorname{sech}^2(3x)$; 50.3. $f'(x) = 4\cosh^3 x \operatorname{senh} x$; 50.4. $f'(x) = 4x^3 \operatorname{senh} x^4$; 50.5. $f'(x) = -e^{\coth x}\operatorname{csch}^2 x$;

50.6. $f'(x) = 2x\operatorname{sech} x - x^2\operatorname{sech} x \tanh x$; 50.7. $f'(t) = \coth t$; 50.8. $f'(t) = e^t \operatorname{sech}^2(e^t)$;

50.9. $f'(x) = \cosh x \operatorname{senh}(\operatorname{senh} x)$; 50.10. $f'(x) = x^{\cosh x}\left(\ln x \ \operatorname{senh} x + \frac{\cosh x}{x}\right)$; 50.11. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$;

50.12. $f'(x) = e^{\tanh x}\left(\operatorname{sech}^2 x \cosh(\cosh x) + \operatorname{senh} x \operatorname{senh}(\cosh x)\right)$; 50.13. $f'(x) = e^x(\cosh x + \operatorname{senh} x)$;

50.14. $f'(x) = \ln(\operatorname{senh} 4x) + 4x\coth(4x)$; 50.15. $f'(x) = \tanh^{-1} x$; 50.16. $f'(x) = \frac{a}{a^2-x^2}$; 50.17. $f'(x) = -\frac{4}{x\sqrt{x^8+1}}$;

50.18. $f'(x) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$; 50.19. $f'(x) = \frac{1}{x^2}\operatorname{csch}^2\left(\frac{1}{x}\right)$; 50.20. $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$;

50.21. $f'(x) = \frac{4}{5}\operatorname{sech}^2\left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\right)$; 50.22. $f'(x) = 3x^2\coth x^3$; 50.23. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{x}\right)$;

50.24. $f'(x) = 5x^4\frac{\cosh\left(x^5\right)}{1-\operatorname{senh}^2\left(x^5\right)}$; 50.25. $f'(t) = \frac{\operatorname{sech}^2 t}{\tanh t}$; 50.26. $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$; 50.27. $f'(x) = \frac{2x\operatorname{sech}^2\left(x^2\right)}{\sqrt{\tanh^2\left(x^2\right)+1}}$;

50.28. $f'(x) = x^{\operatorname{senh}\sqrt{x}}\left(\frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x \ \cosh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$; 50.29. $f'(x) = (\cosh x)^{\tanh x}\left(\operatorname{sech}^2 x \ln(\cosh x) + \tanh^2 x\right)$;

50.30. $f'(x) = 3\operatorname{csch}(3x)$; 51. $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 54.1. $\tanh x + C$; 54.2. $\frac{1}{2}\cosh(2x) + C$; 54.3. $\ln|\cosh x| + C$;

54.4. $\ln|\operatorname{senh} x| + C$; 54.5. $\ln|1+\cosh x| + C$; 54.6. $x - \frac{1}{3}\tanh(3x) + C$; 54.7. $\frac{1}{4}\left(\operatorname{senh}\left(x^2\right) - x^2\right) + C$;

54.8. $\frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + C$; 54.9. $2\cosh\left(\sqrt{x}\right) + C$; 54.10. $\frac{1}{5}\operatorname{senh}^5 x + C$; 54.11. $\frac{1}{3}\tanh(3x) - \frac{1}{9}\tanh^3(3x) + C$;

54.12. $\frac{3x}{8} + \frac{1}{28}\operatorname{senh}(14x) + \frac{1}{224}\operatorname{senh}(28x) + C$; 54.13. $\frac{\cosh^3 2}{3} - \cosh 2 + \frac{2}{3}$; 54.14. $\frac{x^8-1}{7\sqrt{x}} + C$; 54.15. $\ln^2(\cosh x) + C$;

54.16. $\frac{3}{4}\cosh^{4/3}(\ln x) + C$; 54.17. $x - 2\arctan x + C$; 54.18. $\frac{1}{2}\coth x + C$; 54.19. $1 + \frac{\operatorname{senh}(2)}{2}$; 54.20. 0;

54.21. $\frac{2}{5}\cosh^5\left(\sqrt{x}\right) - \frac{2}{3}\cosh^3\left(\sqrt{x}\right) + \cosh\left(\sqrt{x}\right) + C$; 55.1. $\operatorname{senh}^{-1} x + C$; 55.2. $\cosh^{-1} x + C$; 55.3. $\tanh^{-1} x + C$;

55.4. $\operatorname{csch}^{-1} x + C$; 55.5. $\operatorname{sech}^{-1} x + C$; 55.6. $\frac{1}{2}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$; 55.7. $\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$;

55.8. $\operatorname{arccosh} 3 - \operatorname{arccosh} 2$; 55.9. $\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{sech}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + C$; 55.10. $\frac{1}{2}\ln 3$; 55.11. $\frac{\sqrt{3}}{3}\cosh^{-1}\left(\sqrt{3}x\right) + C$;

55.12. $\frac{\sqrt{6}}{3}\operatorname{sech}^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{6}}\right) + C$; 55.13. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{csch}^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{7}}\right) + C$; 55.14. $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{sen} x\right) + C$; 56. $\frac{1}{2}$;

57. $\frac{88}{3} - 9\ln 9$; 58. $A = a^2\operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{a}\right)$; 59. $A = 2\operatorname{senh} 1$; 60. $A = 0$; 61. $A = \operatorname{senh} 3 + \operatorname{senh} 1 - 4$;

63.1. $g_1(x) = x-1$, $g_2(x) = x^2$, $g_3(x) = e^x$ $g_4(x) = x+1$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;

63.2. $g_1(x) = x-4$, $g_2(x) = 4^x$, $g_3(x) = \sqrt{x}$, $g_4(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;

63.3. $g_1(x) = e^x$, $g_2(x) = \operatorname{sen} x$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = \ln x$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;

63.4. $g_1(x) = \ln x$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = 2x$, $g_4(x) = e^x$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;

63.5. $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = 4^x$, $g_3(x) = \cos x$, $g_4(x) = \operatorname{senh} x$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;

63.6. $g_1(x) = 3^x$, $g_2(x) = 5^x$, $g_3(x) = \ln x$, $g_4(x) = \frac{5}{x}$, $g_5(x) = 1-x$, $g_6(x) = \log_3 x$, $f(x) = g_6(g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x))))))$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Método de integración: Integración por partes.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.9

- Método de integración: Integración por partes.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 175 *: Integre* $\displaystyle\int x \ \operatorname{sen} x \ dx.$

Solución : Integramos por partes con

$$u = x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = - \ \cos x$$

La integral se transforma en

$$\int x \ \operatorname{sen} x \ dx = \overbrace{x \ (- \ \cos x) - \int (- \ \cos x) \ dx}^{\boxed{\text{Integración por partes } u\ v - \int v\ du}} = -x \ \cos x + \int \cos x \ dx = -x \ \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Por lo tanto,

$$\int x \ \operatorname{sen} x \ dx = -x \ \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

★

Ejemplo 176 *: Integre* $\displaystyle\int z \ e^z \ dz.$

Solución : Integramos por partes con

$$u = z \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = dz$$

$$dv = e^z \ dz \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = e^z$$

La integral se transforma en

$$\int z \ e^z \ dz = \overbrace{z \ e^z - \int e^z \ dz}^{\boxed{\text{Integración por partes } u\ v - \int v\ du}} = z \ e^z - e^z + C.$$

Por lo tanto,

$$\int z \ e^z \ dz = z \ e^z - e^z + C.$$

★

Ejemplo 177 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\ dx.$

Solución : Integramos por partes con

$$u = \operatorname{arcsen} x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$
$$dv = dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = x$$

La integral se transforma en

$$\int \operatorname{arcsen} x\ dx = \overbrace{x\ \operatorname{arcsen} x - \int x\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}^{\boxed{\text{Integración por partes}\ u\ v - \int v\ du}} = x\ \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

donde, para obtener la familia de primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, se propone el cambio de variable

$$z = 1 - x^2 \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} dz = -2x\ dx \implies -\frac{dz}{2} = x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\dfrac{dz}{2}}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\int z^{-1/2}\ dz = -\frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_1 = -\frac{1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1$$
$$= -\sqrt{z} + C_1 = -\sqrt{1-x^2} + C_1,$$

es decir,

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C_1.$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{arcsen} x\ dx = x\ \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\ \operatorname{arcsen} x - \left(-\sqrt{1-x^2} + C_1\right) = x\ \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Finalmente

$$\int \operatorname{arcsen} x\ dx = x\ \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

★

Ejemplo 178 *: Integre* $\displaystyle\int \ln x\ dx.$

Solución : Integramos por partes con

$$u = \ln x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{1}{x}\ dx$$
$$dv = dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = x$$

La integral se transforma en

$$\int \ln x\ dx = \overbrace{x\ \ln x - \int x\ \frac{dx}{x}}^{\boxed{\text{Integración por partes } u\ v - \int v\ du}} = x\ \ln x - \int dx = x\ \ln x - x + C.,$$

Por lo tanto,

$$\int \ln x\ dx = x\ \ln x - x + C.$$

★

Ejemplo 179 *: Integre* $\int x^3 \ln x\ dx.$

Solución : Integramos por partes con

$$u = \ln x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{1}{x}\ dx$$

$$dv = x^3\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{x^4}{4}$$

La integral se transforma en

$$\int x^3 \ln x\ dx = \frac{x^4}{4}\ \ln x - \int \frac{x^4}{4}\ \frac{1}{x}\ dx = \frac{x^4}{4}\ \ln x - \frac{1}{4}\ \int x^3\ dx = \frac{x^4}{4}\ \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Por lo tanto,

$$\int x^3 \ln x\ dx = \frac{x^4}{4}\ \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

★

Ejemplo 180 *: Integre* $\int x^2 \cos x\ dx.$

Solución : Integramos por partes con

$$u = x^2 \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = 2x\ dx$$

$$dv = \cos x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \operatorname{sen} x$$

La integral se transforma en

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x\ \operatorname{sen} x\ dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \underbrace{\int x\ \operatorname{sen} x\ dx}_{\boxed{\text{Ver Ejemplo 175}}}$$

Resolvemos la nueva integral $\int x\ \operatorname{sen} x\ dx,$ integramos otra vez por partes con

$$u = x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\ \cos x$$

y obtenemos

$$\int x \ \operatorname{sen} x \ dx = -x\cos x - \int -\cos x \ dx = -x\cos x + \int \cos x \ dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C_1,$$

entonces,

$$\int x^2 \cos x \ dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x + C_1\right) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C,$$

así, la familia de primitivas es

$$\int x^2 \cos x \ dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C.$$

★

Ejemplo 181 *: Integre* $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} \ dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$p = \sqrt{x} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dp = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad 2p \ dp = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int e^{\sqrt{x}} \ dx = \int 2p \ e^p \ dp = 2 \underbrace{\int p \ e^p \ dp}_{\boxed{\text{Ver Ejemplo 176}}}$$

integramos por partes con

$$u = p \qquad \xrightarrow{\text{Al derivar}} \qquad du = dp$$

$$dv = e^p \ dp \qquad \xrightarrow{\text{Al integrar}} \qquad v = e^p$$

la integral se transforma,

$$\int p \ e^p \ dp = p \ e^p - \int e^p \ dp = p \ e^p - e^p + C_1,$$

como $p = \sqrt{x}$, se tiene

$$\int e^{\sqrt{x}} \ dx = 2\left(\sqrt{x} \ e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + C_1\right) = 2e^{\sqrt{x}} \ \left(\sqrt{x} - 1\right) + C,$$

es decir,

$$\int e^{\sqrt{x}} \ dx = 2e^{\sqrt{x}} \ \left(\sqrt{x} - 1\right) + C.$$

★

Ejemplo 182 *: Integre* $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \ dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$p = x^2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dp = 2x \ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dp}{2} = x \ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int x^3 e^{x^2}\ dx = \int x^2 e^{x^2}\ x\ dx = \int p\ e^p\ \frac{dp}{2} = \frac{1}{2}\underbrace{\int p\ e^p\ dp}_{\boxed{\text{Ver Ejemplo 176}}}$$

integramos por partes con

$$u = p \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = dp$$

$$dv = e^p\ dp \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = e^p$$

entonces,

$$\int p\ e^p\ dp = p\ e^p - \int e^p\ dp = p\ e^p - e^p + C_1$$

como $p = x^2$, se tiene

$$\int x^3 e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left(x^2\ e^{x^2} - e^{x^2}\right) + C,$$

es decir,

$$\int x^3 e^{x^2}\ dx = \frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2 - 1\right) + C.$$

★

Ejemplo 183 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx.$

Solución : Integramos por partes con

$$u = \operatorname{arcsen} x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\sqrt{1-x^2}$$

entonces,

$$\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -\sqrt{1-x^2}\ \operatorname{arcsen} x - \int -\sqrt{1-x^2}\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\ \operatorname{arcsen} x + \int dx = -\sqrt{1-x^2}\ \operatorname{arcsen} x + x + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -\sqrt{1-x^2}\ \operatorname{arcsen} x + x + C.$$

★

Ejemplo 184 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln\left(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx)\right) dx.$

Solución : Por propiedades de $\ln(\ )$, tenemos

$$\ln\left(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx)\right) = \ln\left(\operatorname{sen}^n(bx)\right) + \ln\left(\cos^m(bx)\right) = n\ln\left(\operatorname{sen}(bx)\right) + m\ln\left(\cos(bx)\right)$$

así,

$$\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln\left(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx)\right)dx = \int \operatorname{sen}(bx)\ \left(n\ln(\operatorname{sen}(bx)) + m\ln(\cos(bx))\right)dx$$

$$= n\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\operatorname{sen}(bx))\,dx + m\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\cos(bx))\,dx,$$

donde, $\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\operatorname{sen}(bx))\,dx$ la resolvemos integrando por partes, con

$$u = \ln(\operatorname{sen}(bx)) \qquad \xrightarrow{\text{Al derivar}} \qquad du = b\,\frac{\cos(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\,dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(bx)\ dx \qquad \xrightarrow{\text{Al integrar}} \qquad v = \frac{\cos(bx)}{b}$$

luego,

$$\int \operatorname{sen}(bx)\ln(\operatorname{sen}(bx))\,dx = \frac{\cos(bx)}{b}\ln(\operatorname{sen}(bx)) - \int \frac{\cos(bx)}{b}\ b\,\frac{\cos(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\,dx$$

$$= \frac{\cos(bx)}{b}\ln(\operatorname{sen}(bx)) - \int \frac{\cos^2(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\,dx$$

calculamos la integral, $\int \frac{\cos^2(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\,dx$, por la identidad trigonométrica básica,

$$\operatorname{sen}^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1 \qquad \text{se tiene} \qquad \cos^2(\cdot) = 1 - \operatorname{sen}^2(\cdot)$$

y podemos escribir la integral como

$$\int \frac{\cos^2(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\,dx = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\,dx = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(bx)} - \frac{\operatorname{sen}^2(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\right)\,dx = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(bx)} - \operatorname{sen}(bx)\right)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}(bx)}\,dx - \int \operatorname{sen}(bx)\ dx = \int \csc(bx)\ dx - \int \operatorname{sen}(bx)\ dx,$$

se propone el cambio de variable, para ambas integrales

$$z = bx \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = b\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dz}{b} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Así,

$$\int \csc(bx)\ dx - \int \operatorname{sen}(bx)\ dx = \frac{1}{b}\int \csc z\ dz - \frac{1}{b}\int \operatorname{sen} z\ dz = \frac{1}{b}\ln|\csc z - \cot z| + \frac{1}{b}\cos z + C_1$$

$$= \frac{1}{b}\ln|\csc(bx) - \cot(bx)| + \frac{1}{b}\cos(bx) + C_1,$$

con lo que,

$$\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\operatorname{sen}(bx))\,dx = \frac{\cos(bx)}{b}\ln(\operatorname{sen}(bx)) - \frac{1}{b}\ln|\csc(bx) - \cot(bx)| - \frac{1}{b}\cos(bx) + C_1.$$

Calculamos la segunda integral $\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\cos(bx))\,dx$, se propone el cambio de variable, para ambas integrales

$$p=\cos(bx) \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} dp=-\,b\operatorname{sen}(bx)\,dx \quad\Longrightarrow\quad -\frac{dp}{b}=\operatorname{sen}(bx)\,dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\cos(bx))\,dx=-\frac{1}{b}\int \ln p\ dp$$

la cual se resuelve por integración por partes, con

$$\begin{aligned} u&=\ln p &&\xrightarrow{\text{Al derivar}} && du=\frac{1}{p}\ dp\\ dv&=dp &&\xrightarrow{\text{Al integrar}} && v=p \end{aligned}$$

entonces,

$$\int \ln p\ dp=p\ \ln p-\int p\ \frac{1}{p}\ dp=p\ \ln p-\int dp=p\ \ln p-p+C_2=p\,(\ln p-1)+C_2,$$

así,

$$\int \operatorname{sen}(bx)\ln(\cos(bx))\,dx=-\frac{1}{b}\int \ln p\ dp=-\frac{p}{b}\,(\ln p-1)+C_3=-\frac{\cos(bx)}{b}\,(\ln(\cos(bx))-1)+C_3.$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx))\,dx &= n\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\operatorname{sen}(bx))\,dx+m\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\cos(bx))\,dx\\ &= n\left[\frac{1}{b}\cos(bx)\ \ln(\operatorname{sen}(bx))-\frac{1}{b}\ln|\csc(bx)-\cot(bx)|-\frac{1}{b}\cos(bx)\right]\\ &\quad +m\left[-\frac{\cos(bx)}{b}\,(\ln(\cos(bx))-1)\right]+C\\ &= \frac{n}{b}\left[\ \cos(bx)\ln(\operatorname{sen}(bx))-\ln|\csc(bx)-\cot(bx)|-\cos(bx)\ \right]\\ &\quad -\frac{m}{b}\ \cos(bx)\ \ (\ln(\cos(bx))+1)+C. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(bx)\ \ln(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx))\,dx &= \frac{n}{b}\left[\ \cos(bx)\ln(\operatorname{sen}(bx))-\ln|\csc(bx)-\cot(bx)|-\cos(bx)\ \right]\\ &\quad -\frac{m}{b}\ \cos(bx)\ \ (\ln(\cos(bx))+1)+C. \end{aligned}$$

★

Ejemplo 185 *: Integre* $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$.

Solución : Observemos que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx=\int \operatorname{sen} x\ \ \operatorname{sen} x\ dx.$$

Integramos por partes, con

$$u = \operatorname{sen} x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \cos x\ dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\cos x.$$

La integral se transforma en

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\ dx &= -\operatorname{sen} x \cos x - \int -\cos x\ \cos x\ dx = -\operatorname{sen} x\ \cos x + \int \overbrace{\cos^2 x}^{\boxed{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x}}\ dx \\
&= -\operatorname{sen} x\ \cos x + \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\ dx = -\operatorname{sen} x\ \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx \\
&= -\operatorname{sen} x\ \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx + C_1,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x\ \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx + C_1,$$

despejamos $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\ dx &= -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx + C_1 \\
&\Longrightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\ dx + \int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + C_1 \\
&\Longrightarrow 2\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + C_1 \\
&\Longrightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left(-\operatorname{sen} x \cos x + x + C_1\right) \\
&\Longrightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\ \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} x\ \cos x + \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\ \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} x\ \cos x + \frac{x}{2} + C.$$

★

Ejemplo 186 *: Integre* $\int \csc^3 x\ dx$.

Solución : Escribimos la integral como

$$\int \csc^3 x\ dx = \int \csc^2 x\ \csc x\ dx.$$

Integramos por partes, con

$$u = \csc x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = -\ \csc x\ \cot x\ dx$$
$$dv = \csc^2 x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\ \cot x,$$

La integral se transforma en

$$\int \csc^3 x\ dx = \csc x\,(-\cot x) - \int (-\cot x)\,(-\csc x\ \cot x)\ dx = -\csc x\ \cot x - \int \csc x\ \cot^2 x\ dx,$$

es conocido que

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1,$$

así,

$$\int \csc^3 x\ dx = -\csc x\ \cot x - \int \csc x\ \overbrace{\cot^2 x}^{\boxed{\cot^2 x = \csc^2 x - 1}}\ dx = -\csc x\ \cot x - \int \csc x\left(\csc^2 x - 1\right)\ dx$$

$$= -\csc x\ \cot x - \int \left(\csc^3 x - \csc x\right)\ dx = -\csc x\ \cot x - \int \csc^3 x\ dx + \int \csc x\ dx$$

$$= -\csc x\ \cot x - \int \csc^3 x\ dx + \ln|\csc x - \cot x| + C_1,$$

es decir,

$$\int \csc^3 x\ dx = -\csc x\ \cot x - \int \csc^3 x\ dx + \ln|\csc x - \cot x| + C_1,$$

de aquí,

$$2\int \csc^3 x\ dx = -\ \csc x\ \cot x + \ln|\csc x - \cot x| + C_1,$$

con lo que,

$$\int \csc^3 x\ dx = -\ \frac{1}{2}\ \csc x\ \cot x + \frac{1}{2}\ \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

★

Ejemplo 187 *: Integre* $\displaystyle\int \sec^5(ax)\ dx.$

Solución : Escribimos la integral como

$$\int \sec^5(ax)\ dx = \int \sec^3(ax)\ \sec^2(ax)\ dx.$$

Integramos por partes, con

$$u = \sec^3(ax) \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = 3a\ \sec^3(ax)\ \tan(ax)\ dx$$

$$dv = \sec^2(ax)\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{1}{a}\tan(ax),$$

La integral se transforma en

$$\int \sec^5(ax)\ dx = \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) - \int \frac{1}{a}\ \tan(ax)\ 3a\ \sec^3(ax)\ \tan(ax)\ dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) - 3\int \sec^3(ax)\ \overbrace{\tan^2(ax)}^{\boxed{\tan^2(ax) = \sec^2(ax) - 1}}\ dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) - 3\int \sec^3(ax)\left(\sec^2(ax)-1\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) - 3\int \left(\sec^5(ax)-\sec^3(ax)\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) - 3\int \sec^5(ax)\,dx + 3\int \sec^3(ax)\,dx,$$

es decir,

$$\int \sec^5(ax)\ dx = \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) - 3\int \sec^5(ax)\,dx + 3\int \sec^3(ax)\,dx,$$

despejamos $\int \sec^5(ax)\ dx$

$$\int \sec^5(ax)\ dx = \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) - 3\int \sec^5(ax)\,dx + 3\int \sec^3(ax)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int \sec^5(ax)\ dx + 3\int \sec^5(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) + 3\int \sec^3(ax)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad 4\int \sec^5(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) + 3\int \sec^3(ax)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int \sec^5(ax)\,dx = \frac{1}{4a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) + \frac{3}{4}\int \sec^3(ax)\,dx,$$

para resolver la integral de la secante cúbica aplicamos el método de integración por partes. Escribimos la integral como

$$\int \sec^3(ax)\ dx = \int \sec^2(ax)\ \sec(ax)\ dx,$$

integramos por partes, con

$$u = \sec(ax) \quad \xrightarrow{\text{Al derivar}} \quad du = a\ \sec(ax)\ \tan(ax)\ dx$$

$$dv = \sec^2(ax)\ dx \quad \xrightarrow{\text{Al integrar}} \quad v = \frac{1}{a}\tan(ax).$$

La integral se transforma en

$$\int \sec^3(ax)\ dx = \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) - \int \frac{1}{a}\ \tan(ax)\ a\ \sec(ax)\ \tan(ax)\ dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) - \int \sec(ax)\ \overbrace{\tan^2(ax)}^{\boxed{\tan^2(ax)=\sec^2(ax)-1}}\ dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) - \int \sec(ax)\left(\sec^2(ax)-1\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) - \int \left(\sec^3(ax)-\sec(ax)\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) - \int \sec^3(ax)\,dx + \int \sec(ax)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) - \int \sec^3(ax)\,dx + \ln|\sec(ax)+\tan(ax)| + C_2,$$

es decir,

$$\int \sec^3(ax)\ dx = \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) - \int \sec^3(ax)\, dx + \ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C_2,$$

despejamos $\int \sec^3(ax)\ dx$

$$\int \sec^3(ax)\ dx + \int \sec^3(ax)\ dx = \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) + \ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C_2,$$

de aquí,

$$2\int \sec^3(ax)\ dx = \frac{1}{a}\ \sec(ax)\ \tan(ax) + \ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C_2,$$

con lo que,

$$\int \sec^3(ax)\ dx = \frac{1}{2a}\sec(ax)\ \tan(ax) + \frac{1}{2}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C_1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \sec^5(ax)\ dx &= \frac{1}{4a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) + \frac{3}{4}\int \sec^3(ax)\, dx \\ &= \frac{1}{4a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2a}\sec(ax)\ \tan(ax) + \frac{1}{2}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C_1\right] \\ &= \frac{1}{4a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) + \frac{3}{8a}\sec(ax)\ \tan(ax) + \frac{3}{8}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int \sec^5(ax)\ dx = \frac{1}{4a}\ \sec^3(ax)\ \tan(ax) + \frac{3}{8a}\sec(ax)\ \tan(ax) + \frac{3}{8}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C.$$

★

Ejemplo 188 *: Integre* $\int x \operatorname{arcsen} x\ dx.$

Solución : Integramos por partes, con

$$u = \operatorname{arcsen} x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

$$dv = x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{x^2}{2},$$

entonces,

$$\int x \operatorname{arcsen} x\ dx = \frac{x^2}{2}\ \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{x^2}{2}\ \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

Resolvemos la integral $\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{\left(1-x^2\right)-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\ = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx,\end{aligned}$$

donde

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arcsen} x + C_1,$$

mientras que,

$$\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{1-x^2}{(1-x^2)^{1/2}}\ dx = \int \sqrt{1-x^2}\ dx$$

e integramos por partes, con

$$\begin{aligned} u = \sqrt{1-x^2} \quad &\xrightarrow{\text{Al derivar}} \quad du = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ dv = dx \quad &\xrightarrow{\text{Al integrar}} \quad v = x, \end{aligned}$$

así,

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = x\ \sqrt{1-x^2} - \int x\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\ \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx,$$

es decir,

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = x\ \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx &= \int \sqrt{1-x^2}\ dx - \operatorname{arcsen} x + C_2 \\ &= x\ \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx - \operatorname{arcsen} x + C_2, \end{aligned}$$

con lo que,

$$\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\ \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx - \operatorname{arcsen} x + C_2,$$

despejamos $\displaystyle\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$,

$$\begin{aligned} &\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\ \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx - \operatorname{arcsen} x + C_2 \\ &\qquad \Longrightarrow \quad \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\ \sqrt{1-x^2} - \operatorname{arcsen} x + C_2 \\ &\qquad \Longrightarrow \quad 2\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\ \sqrt{1-x^2} - \operatorname{arcsen} x + C_2 \\ &\qquad \Longrightarrow \quad \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\ x\ \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C_1. \end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$\int x \operatorname{arcsen} x\ dx = \frac{x^2}{2}\ \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{x^2}{2}\ \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ x\ \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C_1\right).$$

Luego,

$$\int x \operatorname{arcsen} x\ dx = \frac{x^2}{2}\ \operatorname{arcsen} x + \frac{x}{4}\ \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x + C.$$

★

Ejemplo 189 *: Integre* $\displaystyle\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx.$

Solución : Integramos por partes, con

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}(5x) & &\xrightarrow{\text{Al derivar}} & du &= 5\cos(5x)\ dx \\ dv &= \cos(3x)\,dx & &\xrightarrow{\text{Al integrar}} & v &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)\,, \end{aligned}$$

la integral queda

$$\begin{aligned} \int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) - \int \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)\ 5\cos(5x)\ dx \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{3}\int \operatorname{sen}(3x)\ \cos(5x)\ dx \end{aligned}$$

para resolver la integral $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\ \cos(5x)\ dx$, integramos, de nuevo, por partes con

$$\begin{aligned} u &= \cos(5x) & &\xrightarrow{\text{Al derivar}} & du &= -5\operatorname{sen}(5x)\ dx \\ dv &= \operatorname{sen}(3x)\,dx & &\xrightarrow{\text{Al integrar}} & v &= -\frac{1}{3}\cos(3x)\,, \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(3x)\ \cos(5x)\ dx &= \cos(5x)\ \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right) - \int \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)(-5\operatorname{sen}(5x))\ dx \\ &= -\frac{1}{3}\cos(5x)\ \cos(3x) - \frac{5}{3}\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{3}\int \operatorname{sen}(3x)\ \cos(5x)\ dx \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos(5x)\ \cos(3x) - \frac{5}{3}\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx\right) \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{9}\cos(5x)\ \cos(3x) + \frac{25}{9}\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx, \end{aligned}$$

es decir,

$$\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{9}\cos(5x)\ \cos(3x) + \frac{25}{9}\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx,$$

despejando $\displaystyle\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx$

$$\begin{aligned} &\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{9}\cos(5x)\ \cos(3x) + \frac{25}{9}\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx \\ &\Longrightarrow \int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx - \frac{25}{9}\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{9}\cos(5x)\ \cos(3x) + C_1 \\ &\Longrightarrow \left(1 - \frac{25}{9}\right)\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{9}\cos(5x)\ \cos(3x) + C_1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; -\frac{16}{9}\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{9}\cos(5x)\ \cos(3x) + C_1$$

$$\Longrightarrow \; \int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx = -\frac{3}{16}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{16}\cos(5x)\ \cos(3x) + C.$$

Luego,

$$\int \cos(3x)\ \operatorname{sen}(5x)\ dx = -\frac{3}{16}\operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{16}\cos(5x)\ \cos(3x) + C.$$

★

Ejemplo 190 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx.$

Solución : Integramos por partes, con

$$u = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(4x)\,dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\frac{1}{4}\cos(4x)\,,$$

la integral queda

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right) - \int\left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right)\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\ dx$$

$$= -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

para resolver la integral $\displaystyle\int \cos(4x)\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$, integramos, de nuevo, por partes con

$$u = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

$$dv = \cos(4x)\,dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\,,$$

y obtenemos

$$\int \cos(4x)\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)\ dx = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) - \int \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}(4x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ dx,$$

entonces,

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

$$= -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}(4x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ dx\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{1}{32}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{64}\int \operatorname{sen}(4x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ dx,$$

es decir,

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{1}{32}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{64}\int \operatorname{sen}(4x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ dx,$$

despejando $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx$

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{1}{32}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{64}\int \operatorname{sen}(4x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

$$\Longrightarrow \int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx - \frac{1}{64}\int \operatorname{sen}(4x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x)$$

$$+\frac{1}{32}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + C_1$$

$$\Longrightarrow \left(1-\frac{1}{64}\right)\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{1}{32}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + C_1$$

$$\Longrightarrow \frac{63}{64}\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{1}{32}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + C_1$$

$$\Longrightarrow \int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = -\frac{16}{63}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{2}{63}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = -\frac{16}{63}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{2}{63}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + C.$$

★

Ejemplo 191 *: Integre* $\displaystyle\int x\ \cos x\ \operatorname{sen} x\ dx.$

Solución : Integramos por partes, con

$$u = x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = dx$$

$$dv = \cos x\ \operatorname{sen} x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2},$$

la integral se transforma en

$$\int x\ \cos x\ \operatorname{sen} x\ dx = x\ \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}\ dx = \frac{x\ \operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \operatorname{sen}^2 x\ dx}_{\boxed{\text{Ver Ejemplo 185}}},$$

para obtener la integral de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ escribimos la integral como

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \int \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} x\ dx,$$

e integramos por partes, con

$$u = \operatorname{sen} x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \cos x\ dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\cos x.$$

La integral queda

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x \cos x - \int -\cos x\ \cos x\ dx = -\operatorname{sen} x\ \cos x + \int \overbrace{\cos^2 x}^{\boxed{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x}}\ dx$$

$$= -\operatorname{sen} x\ \cos x + \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\ dx = -\operatorname{sen} x\ \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx$$

$$= -\operatorname{sen} x\ \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx + C_2,$$

es decir,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x\ \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx + C_2,$$

despejamos $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx + C_2$$

$$\Longrightarrow \quad \int \operatorname{sen}^2 x\ dx + \int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + C_2$$

$$\Longrightarrow \quad 2\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + C_2 \quad \Longrightarrow \quad \int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left(-\operatorname{sen} x \cos x + x + C_2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\ \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} x\ \cos x + \frac{x}{2} + C_1.$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\ \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} x\ \cos x + \frac{x}{2} + C_1,$$

entonces,

$$\int x\ \cos x\ \operatorname{sen} x\ dx = \frac{x\ \operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{x\ \operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\left[-\ \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} x\ \cos x + \frac{x}{2} + C_1\right]$$

$$= \frac{x\ \operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x\ \cos x}{4} - \frac{x}{4} + C.$$

Finalmente,

$$\int x\ \cos x\ \operatorname{sen} x\ dx = \frac{x\ \operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x\ \cos x}{4} - \frac{x}{4} + C.$$

★

Ejemplo 192 *: Integre* $\int e^x\ \cos x\ dx$.

Solución : Integramos por partes, con

$$u = e^x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = e^x\ dx$$

$$dv = \cos x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \operatorname{sen} x,$$

la integral se transforma en

$$\int e^x\ \cos x\ dx = e^x\ \operatorname{sen} x - \int e^x\ \operatorname{sen} x\ dx,$$

para resolver $\int e^x\ \operatorname{sen} x\ dx$, integramos por partes, con

$$u = e^x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = e^x\ dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\ \cos x,$$

y obtenemos que

$$\int e^x \ \operatorname{sen} x \ dx = e^x \left(- \ \cos x\right) - \int e^x \left(- \ \cos x\right) \ dx = - \ e^x \ \cos x + \int e^x \ \cos x \ dx,$$

así,

$$\int e^x \ \cos x \ dx = e^x \ \operatorname{sen} x - \int e^x \ \operatorname{sen} x \ dx = e^x \ \operatorname{sen} x - \left(- \ e^x \ \cos x + \int e^x \ \cos x \ dx\right)$$

$$= e^x \ \operatorname{sen} x + e^x \ \cos x - \int e^x \ \cos x \ dx,$$

es decir,

$$\int e^x \ \cos x \ dx = e^x \ \operatorname{sen} x + e^x \ \cos x - \int e^x \ \cos x \ dx,$$

despejando $\int e^x \ \cos x \ dx$

$$\int e^x \ \cos x \ dx = e^x \ \operatorname{sen} x + e^x \ \cos x - \int e^x \ \cos x \ dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int e^x \ \cos x \ dx + \int e^x \ \cos x \ dx = e^x \ \operatorname{sen} x + e^x \ \cos x + C_1$$

$$\Longrightarrow \quad 2 \int e^x \ \cos x \ dx = e^x \ \operatorname{sen} x + e^x \ \cos x + C_1$$

$$\Longrightarrow \quad \int e^x \ \cos x \ dx = \frac{1}{2} \left(e^x \ \operatorname{sen} x + e^x \ \cos x + C_1\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \int e^x \ \cos x \ dx = \frac{1}{2} \ e^x \ \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \ e^x \ \cos x + C.$$

Luego

$$\int e^x \ \cos x \ dx = \frac{1}{2} \ e^x \ \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \ e^x \ \cos x + C.$$

★

Ejemplo 193 *: Integre* $\int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx$, *con* $a > 0$ *y* $a \neq 1$.

Solución : Integramos por partes, con

$$u = a^x \quad \xrightarrow{\text{Al derivar}} \quad du = a^x \ \ln a \ dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(bx)\, dx \quad \xrightarrow{\text{Al integrar}} \quad v = - \ \frac{1}{b} \ \cos(bx),$$

la integral se transforma en

$$\int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = a^x \ \left(- \ \frac{1}{b} \ \cos(bx)\right) - \int \left(- \ \frac{1}{b} \ \cos(bx)\right) \ (a^x \ \ln a) \ dx$$

$$= - \ \frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b} \int a^x \ \cos(bx) \ dx,$$

es decir,

$$\int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = - \ \frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b} \int a^x \ \cos(bx) \ dx,$$

para resolver $\displaystyle\int a^x \ \cos(bx) \ dx$, integramos por partes, con

$$u = a^x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = a^x \ \ln a \ dx$$

$$dv = \cos(bx)\, dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{1}{b} \ \operatorname{sen}(bx),$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int a^x \ \cos(bx) \ dx &= a^x \left(\frac{1}{b} \ \operatorname{sen}(bx)\right) - \int \left(\frac{1}{b} \ \operatorname{sen}(bx)\right) \ (a^x \ \ln a) \ dx \\ &= \frac{1}{b} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) - \frac{\ln a}{b} \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx,\end{aligned}$$

de aquí,

$$\int a^x \ \cos(bx) \ dx = \frac{1}{b} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) - \frac{\ln a}{b} \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx &= -\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b} \int a^x \ \cos(bx) \ dx \\ &= -\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b} \left(\frac{1}{b} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) - \frac{\ln a}{b} \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx\right) \\ &= -\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) - \frac{\ln^2 a}{b^2} \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx,\end{aligned}$$

es decir,

$$\int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = -\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) - \frac{\ln^2 a}{b^2} \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx,$$

despejamos $\displaystyle\int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx$

$$\begin{aligned}&\int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = -\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) - \frac{\ln^2 a}{b^2} \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx \\ &\Longrightarrow \quad \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx + \frac{\ln^2 a}{b^2} \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = -\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) + C_1 \\ &\Longrightarrow \quad \left(1 + \frac{\ln^2 a}{b^2}\right) \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = -\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) + C_1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{b^2 + \ln^2 a}{b^2} \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = -\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) + C_1 \\ &\Longrightarrow \quad \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = \frac{b^2}{b^2 + \ln^2 a} \left(-\frac{1}{b} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) + C_1\right) \\ &\Longrightarrow \quad \int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = -\frac{b}{b^2 + \ln^2 a} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2 + \ln^2 a} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) + C.\end{aligned}$$

Luego,

$$\int a^x \ \operatorname{sen}(bx) \ dx = -\frac{b}{b^2 + \ln^2 a} \ a^x \ \cos(bx) + \frac{\ln a}{b^2 + \ln^2 a} \ a^x \ \operatorname{sen}(bx) + C.$$

★

Ejemplo 194 *: Integre* $\displaystyle\int \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right)\ dx.$

Solución : Integramos por partes, con

$$u = \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right) \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{2x^2+1}{x\left(1+x^2\right)}\ dx$$

$$dv = dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = x,$$

la integral se transforma en

$$\int \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right)\ dx = x\ \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right) - \int x\ \frac{2x^2+1}{x\left(1+x^2\right)}\ dx = x\ \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{2x^2+1}{1+x^2}\ dx,$$

donde,

$$\int \frac{2x^2+1}{1+x^2}\ dx = \int \frac{2x^2+1+1-1}{1+x^2}\ dx = \int \frac{2x^2+2-1}{1+x^2}\ dx = \int \left(\frac{2x^2+2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{2\left(x^2+1\right)}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int \left(2 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2x - \arctan x + C_1,$$

por lo tanto,

$$\int \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right)\ dx = x\ \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{2x^2+1}{1+x^2}\ dx = x\ \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right) - (2x - \arctan x) + C$$

$$= x\ \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right) - 2x + \arctan x + C.$$

Luego,

$$\int \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right)\ dx = x\ \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right) - 2x + \arctan x + C.$$

★

Ejemplo 195 *: Integre* $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x\ dx.$

Solución : Integramos por partes, con

$$u = x^2 \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = 2x\ dx$$

$$dv = \cos x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \operatorname{sen} x,$$

la integral se transforma en

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\ dx = \left(x^2 \operatorname{sen} x \ \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\ \operatorname{sen} x\ dx = \left(\overbrace{(\pi)^2 \operatorname{sen}(\pi)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{(0)^2 \operatorname{sen}(0)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite inferior}}}\right) - \int_0^{\pi} 2x\ \operatorname{sen} x\ dx,$$

como $\operatorname{sen}(\pi) = \operatorname{sen}(0) = 0$, entonces

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\ dx = -2\int_0^{\pi} x\ \operatorname{sen} x\ dx.$$

para resolver la nueva integral $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ \operatorname{sen} x\ dx$, integramos por partes, con

$$u = x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\ \cos x$$

La integral se transforma en

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\ dx = \left(-x\cos x \right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\ dx = \left(\overbrace{-(\pi)\cos(\pi)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{-(0)\cos(0)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite inferior}}}\right) + \int_0^{\pi} \cos x\ dx,$$

como $\cos(\pi) = -1$ y $\cos(0) = 1$, entonces

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\ dx = -(\pi)(-1) - (-(0)(1)) + \int_0^{\pi} \cos x\ dx = \pi + \int_0^{\pi} \cos x\ dx,$$

de aquí,

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\ dx = -2\int_0^{\pi} x\ \operatorname{sen} x\ dx = -2\left(\pi + \int_0^{\pi} \cos x\ dx\right) = -2\pi - 2\int_0^{\pi} \cos x\ dx.$$

Resolvemos la integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\ dx$,

$$\int_0^{\pi} \cos x\ dx = \left(\operatorname{sen} x \right|_0^{\pi} = \overbrace{\operatorname{sen}(\pi)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite superior}}} - \overbrace{\operatorname{sen}(0)}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite inferior}}} = 0,$$

con lo que,

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\ dx = -2\int_0^{\pi} x\ \operatorname{sen} x\ dx = -2\pi - 2\int_0^{\pi} \cos x\ dx = -2\pi - 2(0) = -2\pi.$$

Luego,

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\ dx = -2\pi.$$

★

Ejemplo 196 *: Integre* $\displaystyle\int_1^{e} x \ln^3 x\ dx$.

Solución : Integramos por partes, con

$$u = \ln^3 x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{3\ln^2 x}{x}\ dx$$

$$dv = x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{x^2}{2},$$

la integral se transforma en

$$\int_1^e x\ln^3 x\ dx = \left(\frac{x^2\ \ln^3 x}{2}\right|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\ \frac{3\ln^2 x}{x}\ dx = \left(\overbrace{\frac{(e)^2\ \ln^3(e)}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(1)^2\ \ln^3(1)}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) - \frac{3}{2}\int_1^e x\ln^2 x\ dx$$

$$= \frac{e^2\ (\ln e)^3}{2} - \frac{(1)\ (\ln 1)^3}{2} - \frac{3}{2}\int_1^e x\ln^2 x\ dx = \frac{e^2\ (1)^3}{2} - \frac{(1)\ (0)^3}{2} - \frac{3}{2}\int_1^e x\ln^2 x\ dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\int_1^e x\ln^2 x\ dx,$$

es decir,

$$\int_1^e x\ln^3 x\ dx = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\int_1^e x\ln^2 x\ dx,$$

para resolver la nueva integral $\int_1^e x\ln^2 x\ dx$, integramos por partes, con

$$u = \ln^2 x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{2\ln x}{x}\ dx$$

$$dv = x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{x^2}{2}$$

La integral se transforma en

$$\int_1^e x\ln^2 x\ dx = \left(\frac{x^2\ \ln^2 x}{2}\right|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\ \frac{2\ln x}{x}\ dx = \left(\overbrace{\frac{(e)^2\ \ln^2(e)}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(1)^2\ \ln^2(1)}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) - \int_1^e x\ln x\ dx$$

$$= \frac{e^2\ (\ln e)^2}{2} - \frac{(1)\ (\ln 1)^2}{2} - \int_1^e x\ln x\ dx = \frac{e^2\,(1)^2}{2} - \frac{(1)\,(0)^2}{2} - \int_1^e x\ln x\ dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x\ dx,$$

es decir,

$$\int_1^e x\ln^2 x\ dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x\ dx,$$

para resolver la nueva integral $\int_1^e x\ln x\ dx$, integramos por partes, con

$$u = \ln x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \frac{1}{x}\ dx$$

$$dv = x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \frac{x^2}{2}$$

La integral se transforma en

$$\int_1^e x\ln x\ dx = \left(\frac{x^2\ \ln x}{2}\right|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\ \frac{1}{x}\ dx = \left(\overbrace{\frac{(e)^2\ \ln(e)}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(1)^2\ \ln(1)}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\ dx$$

$$= \frac{e^2\,(1)}{2} - \frac{(1)\,(0)}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\ dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_1^e\right. = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\overbrace{\left(\frac{(e)^2}{2}\right)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}} - \overbrace{\left(\frac{(1)^2}{2}\right)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4},$$

es decir,

$$\int_1^e x\ln x\ dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4},$$

así,

$$\int_1^e x\ln^3 x\ dx = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\int_1^e x\ln^2 x\ dx = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x\ dx\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{3e^2}{4} + \frac{3}{2}\int_1^e x\ln x\ dx$$

$$= -\frac{e^2}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{e^2}{4} + \frac{3e^2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{e^2}{8} + \frac{3}{8}.$$

Luego,

$$\int_1^e x\ln^3 x\ dx = \frac{e^2}{8} + \frac{3}{8}.$$

★

Ejemplo 197 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sec^3(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$z = \operatorname{arcsen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda,

$$\int \frac{\sec^3(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \sec^3 z\ dz.$$

Escribimos la integral como

$$\int \sec^3 z\ dz = \int \sec^2 z \sec z\ dz.$$

Integramos por partes, con

$$u = \sec z \qquad \xrightarrow{\text{Al derivar}} \qquad du = \sec z\ \tan z\ dz$$

$$dv = \sec^2 z\ dz \qquad \xrightarrow{\text{Al integrar}} \qquad v = \tan z.$$

La integral se transforma en

$$\int \sec^3 z\ dz = \sec z\ \tan z - \int \tan z\ \sec z\ \tan z\ dz = \sec z\ \tan z - \int \sec z\ \tan^2 z\ dz,$$

por la identidad trigonométrica

$$\tan^2 z + 1 = \sec^2 z, \qquad \text{se tiene que} \qquad \tan^2 z = \sec^2 z - 1,$$

así,

$$\int \sec^3 z\ dz = \sec z\ \tan z - \int \sec z\ \tan^2 z\ dz = \sec z\ \tan z - \int \sec z \left(\sec^2 z - 1\right)\ dz$$

$$= \sec z\ \tan z - \int \sec^3 z\ dz + \int \sec z\ dz = \sec z\ \tan z - \int \sec^3 z\ dz + \ln|\sec z + \tan z| + C,$$

es decir,

$$\int \sec^3 z\ dz = \sec z\ \tan z - \int \sec^3 z\ dz + \ln|\sec z + \tan z| + C,$$

de aquí,

$$2\int \sec^3 z\ dz = \sec z\ \tan z + \ln|\sec z + \tan z| + C,$$

con lo que,

$$\int \sec^3 z\ dz = \frac{1}{2}\sec z\ \tan z + \frac{1}{2}\ln|\sec z + \tan z| + C,$$

como $z = \operatorname{arcsen} x$, se tiene que

$$\int \frac{\sec^3(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\sec(\operatorname{arcsen} x)\ \tan(\operatorname{arcsen} x) + \frac{1}{2}\ln|\sec(\operatorname{arcsen} x) + \tan(\operatorname{arcsen} x)| + C.$$

Observemos que:

- El término $\sec(\operatorname{arcsen} x)\ \tan(\operatorname{arcsen} x)$ de la familia de primitiva, se puede escribir como,

  $$\sec(\operatorname{arcsen} x)\ \tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}\ \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{\cos^2(\operatorname{arcsen} x)},$$

  por la identidad trigonométrica

  $$\operatorname{sen}^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1, \qquad \text{se tiene que} \qquad \cos^2(\cdot) = 1 - \operatorname{sen}^2(\cdot),$$

  se tiene,

  $$\sec(\operatorname{arcsen} x)\ \tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{x}{1+x^2}$$

- El argumento de la expresión logaritmo natural, $\sec(\operatorname{arcsen} x) + \tan(\operatorname{arcsen} x)$, se puede escribir

  $$\sec(\operatorname{arcsen} x) + \tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} + \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.$$

  Por otra parte, es conocido que

  $$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2},$$

  así,

  $$\sec(\operatorname{arcsen} x) + \tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\sec^3(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right| + C = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right| + C.$$

Finalmente,

$$\int \frac{\sec^3(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right| + C.$$

★

Ejemplo 198 *: Demostrar la fórmula de reducción*

$$\int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx = \frac{x\left(x^2+a^2\right)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx,$$

con $n \neq -\dfrac{1}{2}$.

Demostración : Integramos por partes, con

$$\begin{aligned} u = \left(x^2+a^2\right)^n \quad &\xrightarrow{\text{Al derivar}} \quad du = 2nx\left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \\ dv = dx \quad &\xrightarrow{\text{Al integrar}} \quad v = x, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx &= x\left(x^2+a^2\right)^n - \int x \ 2nx\left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \\ &= x\left(x^2+a^2\right)^n - 2n\int x^2\left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \\ &= x\left(x^2+a^2\right)^n - 2n\int \left(x^2+a^2-a^2\right)\left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \\ &= x\left(x^2+a^2\right)^n - 2n\int \left[\left(x^2+a^2\right)-a^2\right]\left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \\ &= x\left(x^2+a^2\right)^n - 2n\left(\int \left(x^2+a^2\right)\left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx - \int a^2\left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx\right) \\ &= x\left(x^2+a^2\right)^n - 2n\int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx + 2na^2\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx &= x\left(x^2+a^2\right)^n - 2n\int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx + 2na^2\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \\ \Longrightarrow \quad \int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx + 2n\int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx &= x\left(x^2+a^2\right)^n + 2na^2\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \\ \Longrightarrow \quad (1+2n)\int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx &= x\left(x^2+a^2\right)^n + 2na^2\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx \end{aligned}$$

despejando

$$\int \left(x^2+a^2\right)^n \ dx = \frac{x\left(x^2+a^2\right)^n}{1+2n} + \frac{2na^2}{1+2n}\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1} \ dx,$$

con $n \neq -\dfrac{1}{2}$. ★

Ejemplo 199 *: Demuestre que*

$$\int \frac{x^n \ dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2} \ dx.$$

Demostración : Escribimos la integral como

$$\int \frac{x^n \ dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x^{n-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ dx$$

Integramos por partes, con

$$u = x^{n-1} \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = (n-1)\, x^{n-2}\ dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = -\sqrt{1-x^2}.$$

La integral se transforma en

$$\int \frac{x^n\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = x^{n-1}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \left(-\sqrt{1-x^2}\right)(n-1)\, x^{n-2}\ dx$$

$$= -x^{n-1}\ \sqrt{1-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}\ \sqrt{1-x^2}\ dx,$$

entonces,

$$\int \frac{x^n\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{n-1}\ \sqrt{1-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}\ \sqrt{1-x^2}\ dx.$$

★

Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales

1. $\int xe^x\ dx$ 2. $\int \frac{x}{e^x}\ dx$ 3. $\int x\ 2^{-x}\ dx$ 4. $\int x \operatorname{sen} x\ dx$ 5. $\int t\cos t\ dt$

6. $\int xe^{2x}\ dx$ 7. $\int \frac{x^2}{e^{3x}}\ dx$ 8. $\int x^2\ 3^x\ dx$ 9. $\int x^2 \operatorname{sen} x\ dx$ 10. $\int t^3 \operatorname{sen} t\ dt$

11. $\int \ln x\ dx$ 12. $\int \arctan x\ dx$ 13. $\int \operatorname{arcsen} x\ dx$ 14. $\int 4x\ln(2x)\ dx$

15. $\int \sqrt{x}\ln x\ dx$ 16. $\int x\arctan x\ dx$ 17. $\int x\operatorname{arcsen} x\ dx$ 18. $\int x^3 e^{x^2}\ dx$

19. $\int \cos^2 x\ dx$ 20. $\int \theta\ \cos(3\theta)\, d\theta$ 21. $\int x^5\cos\left(x^3\right) dx$ 22. $\int \left(t^2+5t+6\right)\cos(2t)\, dt$

23. $\int \sec^3\theta\ d\theta$ 24. $\int e^x \operatorname{sen} x\ dx$ 25. $\int \operatorname{sen}(3x)\ \cos(5x)\ dx$ 26. $\int x\operatorname{sen} x\cos x\ dx$

27. $\int x^2\ln x\ dx$ 28. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$ 29. $\int e^{5x}\cos(2x)\, dx$ 30. $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)\ dx$

31. $\int z^2 e^{3z}\ dz$ 32. $\int t^2 e^{-t/2}\ dt$ 33. $\int e^{at}\cos(bt)\, dt$ 34. $\int \left(x^2-2x+5\right)e^{-x}\ dx$

35. $\int \frac{x\ dx}{\operatorname{sen}^2 x}$ 36. $\int x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ dx$ 37. $\int x^2\arctan(3x)\, dx$ 38. $\int 5^x \operatorname{sen}(5x)\, dx$

39. $\int \ln^2 x\ dx$ 40. $\int e^{\sqrt{x}}\ dx$ 41. $\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\, dx$ 42. $\int \ln\left(x\ \sqrt{1+x^2}\right)\ dx$

43. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx$ 44. $\int y^3 e^{-y^2}\ dy$ 45. $\int \frac{x\ \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\ dx$ 46. $\int 3^x\cos x\ dx$

47. $\int x^5 e^{x^2}\ dx$ 48. $\int \frac{\ln^2 t}{t^2}\ dt$ 49. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\ dx$ 50. $\int \left(x^2-2x+3\right)\ln x\ dx$

51. $\int t^3 e^t\ dt$ 52. $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$ 53. $\int x\tan^2(2x)\, dx$ 54. $\int x\left(\arctan x\right)^2\ dx$

55. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ 56. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{\theta}}{\sqrt{1-\theta}}\,d\theta$ 57. $\displaystyle\int \cos x\ \cos^2(3x)\ dx$ 58. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^x}\,dx$

59. $\displaystyle\int x\csc^2 x\ dx$ 60. $\displaystyle\int x\tan^{-1} x\ dx$ 61. $\displaystyle\int \cos^2(\ln x)\,dx$ 62. $\displaystyle\int \cos t\ln(\operatorname{sen} t)\,dt$

63. $\displaystyle\int (\ln x)^2\ dx$ 64. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)dx$ 65. $\displaystyle\int x^2\cos(3x)\,dx$ 66. $\displaystyle\int x\cos^2 x\operatorname{sen} x\ dx$

67. $\displaystyle\int \sec^5\theta\ d\theta$ 68. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\cos^3(x^2)}$ 69. $\displaystyle\int \frac{x\ e^x}{(x+1)^2}\,dx$ 70. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\ dx$

71. $\displaystyle\int x^3\ln x\ dx$ 72. $\displaystyle\int t\ \operatorname{sen}(4t)\,dt$ 73. $\displaystyle\int \sec^3(ax+b)\ dx$ 74. $\displaystyle\int x^2\ \operatorname{sen}(2x)\,dx$

75. $\displaystyle\int x\ 5^x\ dx$ 76. $\displaystyle\int \frac{x^2\ e^x}{(x+2)^2}\,dx$ 77. $\displaystyle\int \sec^5(ax+b)\ dx$ 78. $\displaystyle\int \frac{\ln x\ dx}{(\ln x+1)^2}$

79. $\displaystyle\int z\ \cos(2z)\,dz$ 80. $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen}^2 x\ dx$ 81. $\displaystyle\int e^{-\theta}\cos(3\theta)\,d\theta$ 82. $\displaystyle\int x\ a^x\ dx$

83. $\displaystyle\int \frac{\ln x\ dx}{\sqrt{1-x}}$ 84. $\displaystyle\int \arccos z\ dz$ 85. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2t)\ln\left(\cos^7 t\right)dt$ 86. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2t)\ \operatorname{sen}(4t)\,dt$

87. $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}\ dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 88. $\displaystyle\int t^3\arctan(2t)\,dt$ 89. $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 90. $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

91. $\displaystyle\int \frac{x\ln x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 92. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\ \ln\left(\operatorname{sen}^4 x\ \cos^5 x\right)\ dx$ 93. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\ \ln\left(\frac{\cos^{1/2} x}{\operatorname{sen}^{1/3} x}\right)\ dx$

94. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2ax)\ln(\tan(ax))\ dx$ 95. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\ \ln\left(\operatorname{sen}^5 x\right)\ dx$ 96. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ \ln\left(\cot\frac{x}{2}\right)\ dx$

97. $\displaystyle\int \cos(2x)\ \ln(\operatorname{sen} x+\cos x)\ dx$ 98. $\displaystyle\int \cos x\ \ln\left(\operatorname{sen}^{-2} x\ \cos^3 x\right)\ dx$

99. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ \ln\left(\operatorname{sen}^4 x\ \cos^5 x\right)\ dx$ 100. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}^4 t\ln\left(\operatorname{arcsen}^3 t\right)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ 101. $\displaystyle\int \csc^3 x\ dx$

102. $\displaystyle\int_1^e x\ln^3 x\ dx$ 103. $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos x\ dx$ 104. $\displaystyle\int \cos(bx)\ \ln\left(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx)\right)\ dx$

105. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(bx)\ \ln\left(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx)\right)\ dx$ 106. $\displaystyle\int \frac{x^3\ e^x}{(x+3)^2}\,dx$ 107. $\displaystyle\int \theta\ \sec^2\theta\ d\theta$

108. $\displaystyle\int x\operatorname{senh}^2\left(x^2\right)\ dx$ 109. $\displaystyle\int \operatorname{senh}\sqrt{x}\ dx$ 110. $\displaystyle\int_{-1}^1 \cosh^2 x\ dx$ 111. $\displaystyle\int 3^t\operatorname{senh} 3t\ dt$

112. $\displaystyle\int e^{at}\operatorname{senh}(bt)\,dt$ 113. $\displaystyle\int e^{at}\cosh(bt)\,dt$ 114. $\displaystyle\int x^5\cosh\left(x^3\right)dx$ 115. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\ln^2 x\ dx$

116. $\displaystyle\int e^{2x}\arctan\left(e^{x/2}\right)dx$ 117. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\ \ln\left(\sqrt{x}\right)dx$ 118. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\arctan(\operatorname{sen} x+\pi)\,dx$

119. $\displaystyle\int x\ \arctan\left(\sqrt{x}\right)dx$ 120. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ \arctan\left(\sqrt{x}\right)dx$ 121. $\displaystyle\int \cos(2x)\,e^{\cos x-\operatorname{sen} x}dx$

122. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\ln\left(\frac{\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x+\cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right)dx$ 123. $\displaystyle\int \cos(2x)\ln(\cos x-\operatorname{sen} x)\,dx$

124. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3t)\ln\left(\sqrt[3]{\cos t}\right)dt$ 125. $\displaystyle\int \cos(3t)\ln\left(\sqrt{\csc^{\pi} t}\right)dt$ 126. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(6t)\ln\left(\sqrt{\operatorname{sen} t}\right)dt$

127. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{1-\operatorname{sen} x}$ 128. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{1+\operatorname{sen} x}$ 129. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{1-\cos x}$ 130. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{1+\cos x}$

131. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\ dx}{1-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$ 132. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\ dx}{1-\operatorname{sen}(\cos x)}$ 133. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\ dx}{1-\cos(\cos x)}$

134. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\ dx}{1+\operatorname{sen}(e^x)}$ 135. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos(\sqrt{x})}$

2. Demostrar la fórmula de reducción
$$\int \cos^n x\ dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\ dx,$$
con $n \in \mathbb{N}$.

3. Demostrar la fórmula de reducción
$$\int \operatorname{sen}^n x\ dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\ dx,$$
con $n \in \mathbb{N}$.

4. Demostrar la fórmula de reducción
$$\int (\ln x)^n\ dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\ dx.$$

5. Demuestre que
$$\int \frac{x^n\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\ dx.$$

6. Demostrar la fórmula de reducción
$$\int x^n e^x\ dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\ dx.$$

7. Demostrar la fórmula de reducción
$$\int \left(x^2+a^2\right)^n\ dx = \frac{x\left(x^2+a^2\right)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1}\ dx,$$
con $n \neq -\dfrac{1}{2}$.

8. Demostrar la fórmula de reducción
$$\int \sec^n x\ dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\ dx,$$
con $n \neq 1,\ n \in \mathbb{N}$.

9. Demostrar la fórmula de reducción
$$\int \csc^n x\ dx = \frac{\cot x \csc^{n-2} x}{1-n} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x\ dx,$$
con $n \neq 1,\ n \in \mathbb{N}$.

10. Hallar el área limitada por las gráficas de las funciones $y = \ln x,\ y = e^x$ y las rectas verticales $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = 1$.

11. Hallar el área encerrada por el eje x y las curvas $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$.
12. Hallar el área limitada por las gráficas de las funciones $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arcsen} x$, con $x \in [-1, 1]$.
13. Hallar el área limitada por las gráficas de las funciones $y = \ln(x-2)$, $y = \ln\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ y la recta vertical $x = 6$.
14. Hallar el área encerrada por la función $f(x) = \ln\sqrt{x^2-1}$, con $x \in \left[-3, -\sqrt{2}\right]$.
15. Hallar el área encerrada por las curvas $y = 5x$, $y = x\,5^x$, con $x \in [0, 2]$.

Respuestas: Ejercicios

1.1. $(x-1)\,e^x + C$; 1.2. $-(x+1)\,e^{-x} + C$; 1.3. $-(1 + x\ln 2)\,\frac{2^{-x}}{\ln^2 2} + C$; 1.4. $\operatorname{sen} x - x\cos x + C$;

1.5. $\cos t + t\operatorname{sen} t + C$; 1.6. $(2x-1)\,\frac{e^{2x}}{4} + C$; 1.7. $-\left(\frac{2}{27} + \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}x^2\right)e^{-3x} + C$; 1.8. $3^x\left(\frac{2}{\ln^3 3} - \frac{2x}{\ln^2 3} + \frac{x^2}{\ln 3}\right) + C$;

1.9. $2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - x^2\cos x + C$; 1.10. $6t\cos t - 6\operatorname{sen} t - t^3\cos t + 3t^2\operatorname{sen} t + C$; 1.11. $x(\ln x - 1) + C$;

1.12. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$; 1.13. $x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$; 1.14. $(2\ln x + 2\ln 2 - 1)\,x^2 + C$;

1.15. $\frac{2}{3}(\ln x - 1)\,x^{3/2} + C$; 1.16. $\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\arctan x + C$; 1.17. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$;

1.18. $\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right) + C$; 1.19. $\frac{1}{2}\cos x\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x + C$; 1.20. $\frac{1}{9}\cos(3\theta) + \frac{1}{3}\theta\operatorname{sen}(3\theta) + C$;

1.21. $\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) + \frac{1}{3}x^3\operatorname{sen}\left(x^3\right) + C$; 1.22. $\frac{5}{4}\cos(2t) + \frac{11}{4}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{2}t\cos(2t) + \frac{5}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{2}t^2\operatorname{sen}(2t) + C$;

1.23. $\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$; 1.24. $\frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$; 1.25. $\frac{5}{16}\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x) + \frac{3}{16}\cos(3x)\cos(5x) + C$;

1.26. $\frac{1}{2}x\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4}\cos x\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}x + C$; 1.27. $\frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$; 1.28. $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$;

1.29. $\frac{e^{5x}}{29}(5\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)) + C$; 1.30. $-\frac{12}{5}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{18}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) + C$; 1.31. $\frac{1}{3}e^{3z}\left(\frac{2}{9} - \frac{2}{3}z + z^2\right) + C$;

1.32. $-2e^{-t/2}\left(8 + 4t + t^2\right) + C$; 1.33. $\frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\cos(bt) + b\operatorname{sen}(bt)) + C$; 1.34. $-e^{-x}\left(x^2+5\right) + C$;

1.35. $-x\cot x + \ln|\operatorname{sen} x| + C$; 1.36. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x + C$; 1.37. $\frac{1}{3}x^3\arctan 3x - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{162}\ln\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) + C$;

1.38. $\frac{5^x}{\ln^2 5 + 25}((\ln 5)\operatorname{sen}(5x) - 5\cos(5x)) + C$; 1.39. $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C$; 1.40. $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C$;

1.41. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)) + C$; 1.42. $\arctan x - 2x + x\ln\left(x\sqrt{x^2+1}\right) + C$; 1.43. $\frac{1}{2}x(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$;

1.44. $-\frac{1}{2}e^{-y^2}\left(1 + y^2\right) + C$; 1.45. $-x\csc x + \ln|\csc x - \cot x| + C$; 1.46. $\frac{3^x}{\ln^2 3 + 1}(\operatorname{sen} x + (\ln 3)\cos x) + C$;

1.47. $\left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)e^{x^2} + C$; 1.48. $-\frac{1}{t}\left(2 + 2\ln t + \ln^2 t\right) + C$; 1.49. $(\ln(\ln x) - 1)\ln x + C$;

1.50. $\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{9}x^3 + \left(3x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\ln x + C$; 1.51. $\left(6t - 6 - 3t^2 + t^3\right)e^t + C$; 1.52. $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C$;

1.53. $\frac{x}{2}\tan(2x) - \frac{1}{4}\ln|\sec(2x)| - \frac{x^2}{2} + C$; 1.54. $\frac{x^2+1}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$; 1.55. $-\left(\frac{1}{2} + \ln x\right)\frac{1}{2x^2} + C$;

1.56. $2\sqrt{\theta} - 2\sqrt{1-\theta}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\theta}\right) + C$; 1.57. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{3}{35}\cos x\operatorname{sen}(6x) - \frac{1}{70}\operatorname{sen} x\cos(6x) + C$;

1.58. $e^{-x}\left(\frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\right) + C$; 1.59. $-x\cot x + \ln|\operatorname{sen} x| + C$; 1.60. $\frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\arctan x + C$;

1.61. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x\cos(2\ln x) + \frac{1}{5}x\operatorname{sen}(2\ln x) + C$; 1.62. $(\ln(\operatorname{sen} t) - 1)\operatorname{sen} t + C$; 1.63. $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C$;

1.64. $2\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - 2\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right) + C$; 1.65. $\frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\operatorname{sen}(3x) + \frac{x^2}{3}\operatorname{sen}(3x) + C$; 1.66. $\frac{\operatorname{sen} x}{3} - \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x - \frac{x}{3}\cos^3 x + C$;

1.67. $\frac{1}{4}\tan\theta\sec^3\theta + \frac{3}{8}\sec\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$; 1.68. $\frac{1}{4}\sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right) + \frac{1}{4}\ln\left|\sec\left(x^2\right) + \tan\left(x^2\right)\right| + C$;

1.69. $\frac{e^x}{x+1} + C$; 1.70. $x\operatorname{arcsen}^2 x - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + C$; 1.71. $(4\ln x - 1)\,\frac{x^4}{16} + C$;

1.72. $\frac{1}{16}\operatorname{sen}(4t) - \frac{1}{4}t\cos(4t) + C$; 1.73. $\frac{1}{2a}\sec(ax+b)\tan(ax+b) + \frac{1}{2a}\ln|\sec(ax+b) + \tan(ax+b)| + C$;

1.74. $\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}x^2\cos(2x) + C$; 1.75. $5^x\left(\frac{x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln^2 5}\right) + C$; 1.76. $xe^x - e^x - \frac{x^2e^x}{x+2} + C$;

1.77. $\frac{1}{4a}\tan(ax+b)\sec^3(ax+b) + \frac{3}{8a}\sec(ax+b)\tan(ax+b) + \frac{3}{8a}\ln|\sec(ax+b) + \tan(ax+b)| + C$; 1.78. $\frac{x}{\ln x + 1} + C$;

1.79. $\frac{1}{4}\cos(2z) + \frac{1}{2}z\operatorname{sen}(2z) + C$; 1.80. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{1}{4}x\operatorname{sen}(2x) + C$; 1.81. $\frac{e^{-\theta}}{10}(3\operatorname{sen} 3\theta - \cos 3\theta) + C$;

1.82. $a^x\left(\frac{x}{\ln a} - \frac{1}{\ln^2 a}\right) + C$; 1.83. $2\sqrt{1-x}(2 - \ln x) - 2\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}-1}\right| + C$; 1.84. $z\arccos z - \sqrt{1-z^2} + C$;

1.85. $7\cos^2 t\left(\frac{1}{2} - \ln|\cos t|\right) + C$; 1.86. $-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(2t)\cos(4t) + \frac{1}{6}\cos(2t)\operatorname{sen}(4t) + C$;

1.87. $(1-x)\sqrt{1-e^{2x}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right| + C$; 1.88. $\frac{t}{32} - \frac{t^3}{24} - \frac{1}{64}\arctan(2t) + \frac{1}{4}t^4\arctan(2t) + C$;

1.89. $-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + x + C$; 1.90. $\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| + C$; 1.91. $(1-\ln x)\sqrt{1-x^2} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$;

1.92. $2\operatorname{sen}^2 x\,(2\ln|\operatorname{sen} x| - 1) + 5\cos^2 x\left(\frac{1}{2} - \ln|\cos x|\right) + C$; 1.93. $\frac{1}{2}\cos^2 x\left(\frac{1}{2} - \ln|\cos x|\right) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\left(\frac{1}{2} - \ln|\operatorname{sen} x|\right) + C$;

1.94. $\frac{1}{a}\operatorname{sen}^2(ax)\ln|\tan(ax)| + \frac{1}{a}\ln|\cos(ax)| + C$; 1.95. $5\operatorname{sen}^2 x\left(\ln|\operatorname{sen} x| - \frac{1}{2}\right) + C$;

1.96. $-2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| + 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left|\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$; 1.97. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)^2\left(\ln(\operatorname{sen} x + \cos x) - \frac{1}{2}\right) + C$;

1.98. $\operatorname{sen} x\left(\ln\left|\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right| - 1\right) - 3\ln|\sec x - \tan x| + C$; 1.99. $4\ln|\csc x - \cot x| + 9\cos x - 5\cos x\ln\left(\operatorname{sen}^4 x\cos^5 x\right) + C$;

1.100. $\frac{3}{4}\operatorname{arcsen}^5 x\left(\ln|\operatorname{arcsen} x| - \frac{1}{5}\right) + C$; 1.101. $-\frac{1}{2}\csc x\cot x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + C$; 1.102. $\frac{e^2}{8} + \frac{3}{8}$;

1.103. -2π; 1.104. $-\frac{m+n}{b}\operatorname{sen}(bx) + \frac{1}{b}\ln\left(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx)\right)\operatorname{sen}(bx) - \frac{m}{b}\ln\left|\frac{1-\operatorname{sen}(bx)}{\cos(bx)}\right| + C$;

1.105. $\frac{m+n}{b}\cos(bx) - \frac{1}{b}\ln\left(\operatorname{sen}^n(bx)\cos^m(bx)\right)\cos(bx) + \frac{n}{b}\ln\left|\frac{1-\cos(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\right| + C$; 1.106. $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - \frac{x^3e^x}{x+3} + C$;

1.107. $\theta\tan\theta - \ln|\sec\theta| + C$; 1.108. $\frac{1}{8}\operatorname{senh}\left(2x^2\right) - \frac{x^2}{4} + C$; 1.109. $2\sqrt{x}\cosh\left(\sqrt{x}\right) - 2\operatorname{senh}\left(\sqrt{x}\right) + C$;

1.110. $\frac{\operatorname{senh} 2}{2} + 1$; 1.111. $\frac{3^t}{9-\ln^2 3}\left(3\cosh(3t) - (\ln 3)\operatorname{senh}(3t)\right) + C$; 1.112. $\frac{e^{at}}{a^2-b^2}\left(a\operatorname{senh}(bt) - b\cosh(bt)\right) + C$;

1.113. $\frac{e^{at}}{b^2-a^2}\left(b\operatorname{senh}(bt) - a\cosh(bt)\right) + C$; 1.114. $\frac{x^3}{3}\operatorname{senh}\left(x^3\right) - \frac{1}{3}\cosh\left(x^3\right) + C$; 1.115. $\frac{3}{4}x^{4/3}\left(\ln^2 x - \frac{3}{2}\ln x + \frac{9}{8}\right) + C$;

1.116. $\frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right)\arctan\left(e^{x/2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^x}{3}\right)e^{x/2} + C$; 1.117. $\frac{3}{16}x^{4/3}\left(\ln^2 x - \frac{3}{2}\ln x + \frac{9}{8}\right) + C$;

1.118. $\left(\operatorname{sen}^2 x - \pi^2 + 1\right)\arctan(\operatorname{sen} x + \pi) - \operatorname{sen} x + \pi\ln\left(1 + (\operatorname{sen} x + \pi)^2\right) + C$; 1.119. $\frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)\arctan\left(\sqrt{x}\right) + \frac{\sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{x}{3}\right) + C$;

1.120. $\frac{x^{3/2}}{3}\arctan\left(\sqrt{x}\right) - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}\ln|x+1| + C$; 1.121. $(1 - \cos x + \operatorname{sen} x)\,e^{\cos x - \operatorname{sen} x} + C$;

1.122. $\left(\ln(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2}\right)\frac{3\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$; 1.123. $\left(\frac{1}{2} - \ln(\cos x - \operatorname{sen} x)\right)\frac{1-\operatorname{sen}(2x)}{2} + C$;

1.124. $\left(\left(1 - \frac{4}{3}\cos^2 x\right)\ln(\cos x) - 1 + \frac{4}{9}\cos^2 x\right)\frac{\cos x}{3} + C$; 1.125. $-\frac{\pi\operatorname{sen} x}{2}\left(\frac{4}{9}\operatorname{sen}^2 x - 1 + \left(1 - \frac{4}{3}\operatorname{sen}^2 x\right)\ln(\operatorname{sen} x)\right) + C$;

1.126. $\operatorname{sen}^4 x - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x - \frac{4}{9}\operatorname{sen}^6 x + \left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}^4 x + \frac{8}{3}\operatorname{sen}^6 x\right)\ln(\operatorname{sen} x) + C$; 1.127. $x(\tan x + \sec x) + \ln|1 - \operatorname{sen} x| + C$;

1.128. $x(\tan x - \sec x) + \ln|1 + \operatorname{sen} x| + C$; 1.129. $-x(\cot x + \csc x) + \ln|1 - \cos x| + C$;

1.130. $-x(\cot x + \csc x) + \ln|1 + \cos x| + C$; 1.131. $2(\tan(\operatorname{sen} x) - \sec(\operatorname{sen} x))\operatorname{sen} x + 2\ln|1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)| + C$;

1.132. $-2(\tan(\cos x) - \sec(\cos x))\cos x - 2\ln|1 + \operatorname{sen}(\cos x)| + C$;

1.133. $2(\cot(\cos x) + \csc(\cos x))\cos x - 2\ln|1 - \cos(\cos x)| + C$; 1.134. $(\tan(e^x) - \sec(e^x))\,e^x + \ln|1 + \operatorname{sen}(e^x)| + C$;

1.135. $-2\left(\cot\left(\sqrt{x}\right) + \csc\left(\sqrt{x}\right)\right)\sqrt{x} + 2\ln\left|1 + \cos\left(\sqrt{x}\right)\right| + C$; 10. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2) + e - e^{1/2}$; 11. $\sqrt{2} - 1$;

12. $\frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2$; 13. $3\ln 3 - 2$; 14. $5\ln 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) - 3$; 15. $\frac{40}{\ln 5} - \frac{16}{\ln^2 5} - 5$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Método de integración: Algunas integrales trigonométricas.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.10

- Integración : Integrales trigonométricas.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 200 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \ \cos x \ dx.$

Solución : Se observa que, en el integrando aparece la función seno y su correspondiente derivada, la función coseno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos x \ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \overbrace{\operatorname{sen} x}^{\substack{\text{Cambio} \\ u = \operatorname{sen} x}} \ \underbrace{\cos x \ dx}_{\substack{\text{Diferencial} \\ du = \cos x \ dx}} = \overbrace{\int u \ du}^{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}} = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^2 + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C.$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 1}$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen} x \ \cos x \ dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C.$$

★

Ejemplo 201 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \ \cos x \ dx.$

Solución : Se observa que, en el integrando aparece la función seno y su correspondiente derivada, la función coseno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos x \ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \ dx = \int \Big(\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\substack{\text{Cambio} \\ u = \operatorname{sen} x}}\Big)^4 \ \underbrace{\cos x \ dx}_{\substack{\text{Diferencial} \\ du = \cos x \ dx}} = \overbrace{\int u^4 \ du}^{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}} = \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{5}(\operatorname{sen} x)^5 + C = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C.$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 4}$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \; dx = \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + C.$$

★

Ejemplo 202 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}} \; dx.$

Solución : Se observa que, en el integrando aparece la función seno y su correspondiente derivada, la función coseno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos x \; dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}} \; dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{2/3} x} \; dx = \int \frac{\overbrace{\cos x \; dx}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ du = \cos x \; dx}}}}{\Big(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \operatorname{sen} x}}}\Big)^{2/3}} = \int \frac{du}{u^{2/3}} = \overbrace{\underbrace{\int u^{-2/3} \; du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 4}}}^{\boxed{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}}} = \frac{u^{1/3}}{\frac{1}{3}} + C = 3u^{1/3} + C$$

$$= 3\left(\operatorname{sen} x\right)^{1/3} + C = 3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}} \; dx = 3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x} + C.$$

★

Ejemplo 203 *: Integre* $\displaystyle\int \cos^7 x \;\; \operatorname{sen} x \; dx.$

Solución : Se observa que, en el integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\operatorname{sen} x \; dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\; du = \operatorname{sen} x \; dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos^7 x \operatorname{sen} x \; dx = \int \Big(\underbrace{\cos x}_{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cos x}}}\Big)^7 \; \underbrace{\operatorname{sen} x \; dx}_{\boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ -\; du = \operatorname{sen} x \; dx}}} = \int u^7 \overbrace{(-\; du)}^{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}} = -\overbrace{\underbrace{\int u^7 \; du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 4}}}^{\boxed{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}}} = -\; \frac{u^8}{8} + C = -\; \frac{1}{8} \cos^8 x + C.$$

Luego,

$$\int \cos^7 x \ \operatorname{sen} x \ dx = -\frac{1}{8}\cos^8 x + C.$$

★

Ejemplo 204 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt{\cos x} \ \operatorname{sen} x \ dx.$

Solución : Se observa que, en el integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\operatorname{sen} x \ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \operatorname{sen} x \ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt{\underbrace{\cos x}_{\substack{\text{Cambio} \\ u=\cos x}}} \ \overbrace{\operatorname{sen} x \ dx}^{\substack{\text{Diferencial} \\ -\ du = \operatorname{sen} x \ dx}} = \int \sqrt{u} \ (\overset{\downarrow}{-} \ du) = -\int \sqrt{u} \ du = -\overbrace{\underbrace{\int u^{1/2} \ du}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=4}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}} = -\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \ u^{3/2} + C$$

$$= -\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + C. = -\frac{2}{3}\cos^{3/2} x + C.$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

Luego,

$$\int \sqrt{\cos x} \ \operatorname{sen} x \ dx = -\frac{2}{3} \ \cos^{3/2} x + C.$$

★

Ejemplo 205 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \ \cos x \ dx.$

Solución : En el ejemplo 200 se resuelve esta integral con el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos x \ dx,$$

y la familia de primitivas viene dada por

$$\int \operatorname{sen} x \ \cos x \ dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C.$$

En esta ocasión se resuelve la integral de la siguiente manera:

Se observa que en el integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\operatorname{sen} x \ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \operatorname{sen} x \ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \overbrace{\cos x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\cos x}} \underbrace{\operatorname{sen} x\ dx}_{\substack{\text{Diferencial}\\ -du=\operatorname{sen} x\ dx}} = \int u\ \overbrace{(-\ du)}^{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}} = -\ \overbrace{\underbrace{\int u\ du}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=1}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}} = -\ \frac{u^2}{2} + C = -\ \frac{1}{2}\left(\cos x\right)^2 + C = -\ \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen} x\ \cos x\ dx = -\ \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

★

Ejemplo 206 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\ \cos^2 x\ dx.$

Solución : Se observa que en los ejemplos del 200 al 205, se desea encontrar la familia de primitivas de funciones trigonométricas, senos y cosenos, elevadas a una potencia multiplicada por la derivada de dicha función trigonométrica, es decir, las integrales resueltas presentan la siguiente estructura

$$\int \operatorname{sen}^n x\ \cos x\ dx \qquad \text{ó} \qquad \int \cos^m x\ \operatorname{sen} x\ dx$$

en cuyos casos se propuso los cambios de variables

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \text{ó} \qquad u = \cos x$$

respectivamente, dichos cambios transforman a las integrales dadas en integrales más sencillas de resolver, en integrales de potencias.

En este ejemplo el integrando está formado por funciones trigonométricas, senos y cosenos, elevadas, ambas, a una potencia. la idea para obtener la familia de primitivas es re-escribir el integrando de tal forma que cumpla con la estructura de las integrales de los ejemplos del 200 al 205.

Se escribe la integral como

$$\int \overbrace{\operatorname{sen}^3}^{\substack{\text{Potencia impar.}\\ \text{Tomar un término seno.}}} x \cos^2 x\ dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\ \underbrace{\underline{\operatorname{sen} x\ dx}}_{\text{Futuro diferencial.}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\operatorname{sen} x\ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\cos x$, así, cabe la pregunta

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\ dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{\text{¿Qué hacer con este término?}}\ \cos^2 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

por lo que,

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \; dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{\boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}} \; \cos^2 x \; \underline{\operatorname{sen} x \; dx} = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \; \underline{\operatorname{sen} x \; dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, se propone el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\operatorname{sen} x \; dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\, du = \underline{\operatorname{sen} x \; dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \; \underline{\operatorname{sen} x \; dx} = \int \left(1 - \left(\overbrace{\cos x}^{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cos x}}}\right)^2\right) \left(\overbrace{\cos x}^{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cos x}}}\right)^2 \overbrace{\underline{\operatorname{sen} x \; dx}}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ -\, du = \underline{\operatorname{sen} x \; dx}}}} = \int \left(1 - u^2\right) u^2 \left(\overset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{-} du\right)$$

$$= -\int \left(u^2 - u^4\right) \; du \underset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}}{=} -\overbrace{\int u^2 \; du}^{\boxed{\substack{\text{Integrales de una potencia.} \\ \text{Integrales de tabla.}}}} + \overbrace{\int u^4 \; du}^{\boxed{\substack{\text{Integrales de una potencia.} \\ \text{Integrales de tabla.}}}} = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 2 \;\; \text{y} \;\; n = 4}$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \; dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

★

Ejemplo 207 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \; dx.$

Solución : Se escribe la integral como

$$\int \operatorname{sen}^5 x \; dx = \int \operatorname{sen}^4 x \; \underbrace{\operatorname{sen} x \; dx}_{\boxed{\text{Futuro diferencial.}}},$$

Potencia impar. Tomar un término seno.

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\operatorname{sen} x \; dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\cos x$, así, cabe la pregunta

$$\int \operatorname{sen}^5 x \; dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}^4 x}_{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}} \; \underline{\operatorname{sen} x \; dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

por lo que,

$$\int \operatorname{sen}^5 x\ dx = \int \operatorname{sen}^4 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx} = \int \Big(\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}}}\Big)^2 \underline{\operatorname{sen} x\ dx} = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \underline{\operatorname{sen} x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, se propone el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\operatorname{sen} x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \underline{\operatorname{sen} x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^5 x\ dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \underline{\operatorname{sen} x\ dx} = \int \left(1 - \Big(\overbrace{\cos x}^{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cos x}}\Big)^2\right)^2 \overbrace{\underline{\operatorname{sen} x\ dx}}^{\substack{\text{Diferencial} \\ -\ du = \underline{\operatorname{sen} x\ dx}}} = \int \left(1 - u^2\right)^2 (\overbrace{-du}^{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}})$$

$$= -\int \left(1 - u^2\right)^2 du = -\int \left(1 - 2u^2 + u^4\right) du \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}{=} -\int du + \int \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}{2u^2\ du} - \int u^4\ du$$

$$= -\overbrace{\underbrace{\int du}}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.} \\ \text{Integrales de tabla.}}} + 2\overbrace{\underbrace{\int u^2\ du}} - \overbrace{\underbrace{\int u^4\ du}} = -\ u + 2\ \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = -\ \cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 0, \quad n = 2 \ \text{ y } \ n = 4}$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^5 x\ dx = -\ \cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

★

Ejemplo 208 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\ dx.$

Solución : Se escribe el integrando de la siguiente forma

$$\operatorname{sen}^4 x \cos^3 x = \operatorname{sen}^4 x\ \cos^2 x\ \cos x$$

y la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x \; dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \; \underbrace{\cos x \; dx}_{\text{Futuro diferencial.}},$$

Potencia impar. Tomar un término coseno.

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cos x \; dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\operatorname{sen} x$, así, cabe la pregunta

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x \; dx = \int \operatorname{sen}^4 x \underbrace{\cos^2 x}_{\text{¿Qué hacer con este término?}} \; \underline{\cos x \; dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

por lo que,

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x \; dx = \int \operatorname{sen}^4 x \; \underbrace{\cos^2 x}_{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x} \; \underline{\cos x \; dx} = \int \operatorname{sen}^4 x \; \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \underline{\cos x \; dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, se propone el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\cos x \; dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^4 x \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \underline{\cos x \; dx} = \int \left(\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\text{Cambio } u = \operatorname{sen} x}\right)^4 \left(1 - \left(\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\text{Cambio } u = \operatorname{sen} x}\right)^2\right) \overbrace{\underline{\cos x \; dx}}^{\text{Diferencial } du = \underline{\cos x \; dx}} = \int u^4 \left(1 - u^2\right) du$$

$$= \int \left(u^4 - u^6\right) \; du \underset{\text{Linealidad de la integral}}{=} \overbrace{\int u^4 \; du}^{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}} - \overbrace{\int u^6 \; du}^{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 4 \;\; \text{y} \;\; n = 6} = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C.$$

Linealidad de la integral: $\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x \; dx = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C.$$

★

Ejemplo 209 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \cos^5 x\ dx.$

Solución : Se escribe la integral como

$$\int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \overset{\substack{\boxed{\text{Potencia impar.}}\\ \boxed{\text{Tomar un término coseno.}}}}{\cos^5} x\ dx = \int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \cos^4 x\ \underset{\boxed{\text{Futuro diferencial.}}}{\underline{\cos x\ dx}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cos x\ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\operatorname{sen} x$, así, cabe la pregunta

$$\int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \cos^5 x\ dx = \int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \underbrace{\cos^4 x}_{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}\ \underline{\cos x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

por lo que,

$$\int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \cos^4 x\ \underline{\cos x\ dx} = \int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \Big(\underbrace{\cos^2 x}_{\boxed{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x}}\Big)^2\ \underline{\cos x\ dx} = \int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2\ \underline{\cos x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, se propone el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\cos x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \cos^4 x\ \underline{\cos x\ dx} = \int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 \underline{\cos x\ dx} = \int \operatorname{sen}^{2/3} x\ \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 \underline{\cos x\ dx}$$

$$= \int \Big(\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\substack{\boxed{\text{Cambio}}\\ \boxed{u = \operatorname{sen} x}}}\Big)^{2/3}\ \left(1 - \Big(\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\substack{\boxed{\text{Cambio}}\\ \boxed{u = \operatorname{sen} x}}}\Big)^2\right)^2 \overbrace{\underline{\cos x\ dx}}^{\substack{\boxed{\text{Diferencial}}\\ \boxed{du = \underline{\cos x\ dx}}}} = \int u^{2/3}\left(1 + u^2\right)^2 du = \int u^{2/3}\left(1 + 2u^2 + u^4\right)\ du$$

$$= \int \left(u^{2/3} + 2u^{8/3} + u^{14/3}\right)\ du \overset{\substack{\boxed{\text{Linealidad de la integral}}\\ \boxed{\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}}{=} \int u^{2/3}\ du + \int \overset{\substack{\boxed{\text{Linealidad de la integral}}\\ \boxed{\text{Sale de la integral por ser constante}}\\ \boxed{\text{respecto a la variable de integración}}}}{2u^{8/3}}\ du + \int u^{14/3}\ du$$

$$\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}$$

$$= \underbrace{\int u^{2/3}\ du}_{} + 2\ \underbrace{\int u^{8/3}\ du}_{} + \underbrace{\int u^{14/3}\ du}_{} = \frac{u^{5/3}}{\frac{5}{3}} + 2\ \frac{u^{11/3}}{\frac{11}{3}} + \frac{u^{17/3}}{\frac{17}{3}} + C$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{2}{3},\ \ n = \frac{8}{3}\ \ \text{y}\ \ n = \frac{14}{3}}$$

$$= \frac{3}{5}u^{5/3} + \frac{6}{11}u^{11/3} + \frac{3}{17}u^{17/3} + C = \frac{3}{5}\operatorname{sen}^{5/3} x + \frac{6}{11}\operatorname{sen}^{11/3} x + \frac{3}{17}\operatorname{sen}^{17/3} x + C.$$

Luego,

$$\int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \cos^5 x\ dx = \frac{3}{5}\operatorname{sen}^{5/3} x + \frac{6}{11}\operatorname{sen}^{11/3} x + \frac{3}{17}\operatorname{sen}^{17/3} x + C.$$

★

Ejemplo 210 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\ \cos^7 x\ dx.$

Solución : Se tiene que ambos términos, seno y coseno, presentan potencias impares, así, se escribe la integral como

$$\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término seno.}}$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^7 x\ dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^7 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx},$$

$$\boxed{\text{Futuro diferencial.}}$$

ó también como

$$\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término coseno.}}$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^7 x\ dx = \int \operatorname{sen}^5 x \cos^6 x\ \underline{\cos x\ dx},$$

$$\boxed{\text{Futuro diferencial.}}$$

Cabe la pregunta

¿Cuál de las dos formas de reescribir la integral se usa?

Inicialmente, cualquiera de las dos formas se puede utilizar, pero para los cálculos de la familia de primitivas se aconseja utilizar la de menor potencia, en este caso la expresión $\operatorname{sen}^5 x$.

Se escribe la integral como

$$\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término seno.}}$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^7 x\ dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^7 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx},$$

$$\boxed{\text{Futuro diferencial.}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\operatorname{sen} x\ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\cos x$, así, cabe la pregunta

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^7 x\ dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}^4 x}_{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}} \cos^7 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

por lo que,

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^7 x\ dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^7 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx} = \int \Big(\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{\boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}}\Big)^2 \cos^7 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx} = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^7 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, se propone el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\operatorname{sen} x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \underline{\operatorname{sen} x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^7 x\ dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^7 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx} = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^7 x\ \underline{\operatorname{sen} x\ dx}$$

$$= \int \left(1 - \Big(\overbrace{\cos x}^{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cos x}}}\Big)^2\right)^2 \Big(\overbrace{\cos x}^{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cos x}}}\Big)^7 \overbrace{\underline{\operatorname{sen} x\ dx}}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ -\ du = \underline{\operatorname{sen} x\ dx}}}} = \int \left(1 - u^2\right)^2 u^7 \overbrace{(-du)}^{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}} = -\int \left(1 - u^2\right)^2 u^7\ du$$

$$= -\int \left(1 - 2u^2 + u^4\right) u^7\ du = -\int \left(u^7 - 2u^9 + u^{11}\right)\ du \overset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}}{=} -\int u^7\ du + \int \overbrace{2u^9}^{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}}\ du - \int u^{11}\ du$$

$$= -\underbrace{\overbrace{\int u^7\ du}^{\boxed{\substack{\text{Integrales de una potencia.} \\ \text{Integrales de tabla.}}}}}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 7,\ \ n = 9 \ \text{ y } \ n = 11}} + 2\underbrace{\overbrace{\int u^9\ du}^{\boxed{\substack{\text{Integrales de una potencia.} \\ \text{Integrales de tabla.}}}}}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 7,\ \ n = 9 \ \text{ y } \ n = 11}} - \underbrace{\overbrace{\int u^{11}\ du}^{\boxed{\substack{\text{Integrales de una potencia.} \\ \text{Integrales de tabla.}}}}}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 7,\ \ n = 9 \ \text{ y } \ n = 11}} = -\frac{u^8}{8} + \frac{u^{10}}{5} - \frac{u^{12}}{12} + C = -\frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^{12} x}{12} + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^7 x \; dx = -\frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^{12} x}{12} + C.$$

★

Ejemplo 211 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^9 x \;\; \cos^3 x \; dx.$

Solución : Se tiene que ambos términos, seno y coseno, presentan potencias impares, así, se escribe la integral como

$$\int \overset{\substack{\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término seno.}}\\ \downarrow}}{\operatorname{sen}^9 x} \cos^3 x \; dx = \int \operatorname{sen}^8 x \cos^3 x \; \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Futuro diferencial.}}}}{\underline{\operatorname{sen} x \; dx}},$$

ó también como

$$\int \operatorname{sen}^9 x \overset{\substack{\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término coseno.}}\\ \downarrow}}{\cos^3 x} \; dx = \int \operatorname{sen}^9 x \cos^2 x \; \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Futuro diferencial.}}}}{\underline{\cos x \; dx}},$$

Cabe la pregunta

¿Cuál de las dos formas de reescribir la integral se usa?

Inicialmente, cualquiera de las dos formas se puede utilizar, pero para los cálculos de la familia de primitivas se aconseja utilizar la de menor potencia, en este caso la expresión $\cos^3 x$.

Se escribe la integral como

$$\int \operatorname{sen}^9 x \overset{\substack{\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término coseno.}}\\ \downarrow}}{\cos^3 x} \; dx = \int \operatorname{sen}^9 x \cos^2 x \; \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Futuro diferencial.}}}}{\underline{\cos x \; dx}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cos x \; dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\operatorname{sen} x$, así, cabe la pregunta

$$\int \operatorname{sen}^9 x \;\; \cos^3 x \; dx = \int \operatorname{sen}^9 x \; \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}}{\underbrace{\cos^2 x}} \; \underline{\cos x \; dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

por lo que,

$$\int \operatorname{sen}^9 x\ \cos^3 x\ dx == \int \operatorname{sen}^9 x\ \underbrace{\cos^2 x}_{\boxed{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x}}\ \underline{\cos x\ dx} = \int \operatorname{sen}^9 x\ \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\ \underline{\cos x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, se propone el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\cos x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^9 x\ \cos^3 x\ dx = \int \operatorname{sen}^9 x\ \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\ \underline{\cos x\ dx} = \int \left(\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \operatorname{sen} x}}\right)^9 \left(1 - \left(\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \operatorname{sen} x}}\right)^2\right) \overbrace{\underline{\cos x\ dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } du = \underline{\cos x\ dx}}}$$

$$= \int u^9 \left(1 - u^2\right) du = \int \left(u^9 - u^{11}\right) du \underset{\boxed{\text{Linealidad de la integral } \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}{=} \overbrace{\underbrace{\int u^9\ du}}^{\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}} - \overbrace{\underbrace{\int u^{11}\ du}}^{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 9 \ \text{ y } \ n = 11}} = \frac{u^{10}}{10} - \frac{u^{12}}{12} + C$$

$$= \frac{1}{10}\ \operatorname{sen}^{10} x - \frac{1}{12}\ \operatorname{sen}^{12} x + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^9 x\ \cos^3 x\ dx = \frac{1}{10}\ \operatorname{sen}^{10} x - \frac{1}{12}\ \operatorname{sen}^{12} x + C.$$

★

Ejemplo 212 *: Integre* $\displaystyle\int \cos^2 x\ dx.$

Solución : En este ejemplo el integrando tiene potencia par, en el ejemplo 69 se obtuvo la familia de primitivas de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, por medio de la identidad trigonmétrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

y el cambio de variable $u = 2x$, la cual es

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C,$$

para obtener la familia de primitivas de la función $f(x) = \cos^2 x$ se procede de la misma manera.

La identidad trigonométrica

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

permite reescribir la integral como

$$\int \cos^2 x\ dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{\underset{\uparrow}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))\, dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\ dx,$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración

Linealidad de la integral
$\int (f(x)+g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

donde, la primera integral del lado derecho de la igualdad es inmediata

$$\int dx = x + C_1,$$

mientras que, la segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve al proponer el cambio de variable

$$u = 2x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

Cambio $u = 2x$

Diferencial $\frac{du}{2} = dx$

$$\int \cos\overbrace{(2x)}\ \overbrace{dx} = \int \cos u\ \frac{du}{\underset{\uparrow}{2}} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C_2.$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración

Luego,

$$\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right] + C = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C.$$

★

Ejemplo 213 *: Integre* $\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x\ dx.$

Solución : En virtud que, las potencias de las expresiones seno y coseno son pares, se tiene que, por las identidades trigonométricas

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

la integral se puede expresar como

Producto notable
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x\ dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\ dx = \int \frac{\overbrace{(1+\cos(2x))(1-\cos(2x))}}{\underset{\uparrow}{4}}\ dx$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración

$$= \frac{1}{4}\int \left(\underbrace{1-\cos^2(2x)}_{\uparrow}\right) dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{\operatorname{sen}^2(2x)}_{\uparrow}\ dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{1-\cos(4x)}{2}}_{\uparrow}\ dx = \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\int (1-\cos(4x))\, dx$$

Identidad trigonométrica
$\operatorname{sen}^2(\cdot)+\cos^2(\cdot)=1$
de aquí, $\operatorname{sen}^2(2x)=1-\cos^2(2x)$

Identidad trigonométrica
$\operatorname{sen}^2(\cdot)=\dfrac{1-\cos 2(\cdot)}{2}$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos(4x)\ dx\right) = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos(4x)\ dx.$$

Linealidad de la integral
$\int (f(x)+g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Se calcula las integrales. La primera integral es sencilla

$$\int dx = x + C_1.$$

Para la segunda integral, se propone el cambio de variable

$$u = 4x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 4\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{4} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

Cambio
$u = 4x$

Diferencial
$\dfrac{du}{4} = dx$

$$\int \cos\overbrace{(4x)}\ \overbrace{dx} = \int \cos u\ \underset{\uparrow}{\frac{du}{4}} = \frac{1}{4}\int \cos u\ du = \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + C_2.$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

Luego,

$$\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{1}{8}(x+C_1) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)+C_2\right) = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C,$$

es decir,

$$\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C.$$

★

Ejemplo 214 *: Integre* $\displaystyle\int \cos^2(3x)\operatorname{sen}^4(3x)\ dx.$

Solución : Puesto que, las potencias de las expresiones seno y coseno son pares se usa las identidades trigonométricas

$$\cos^2(\cdot) = \frac{1+\cos(2(\cdot))}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2(\cdot) = \frac{1-\cos(2(\cdot))}{2}.$$

de aquí,

$$\cos^2(3x) = \frac{1+\cos(6x)}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2(3x) = \frac{1-\cos(6x)}{2}.$$

Tenemos,

$$\int \cos^2(3x)\operatorname{sen}^4(3x)\ dx = \int \underbrace{\cos^2(3x)}_{\substack{\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos^2(\cdot)=\frac{1+\cos(2(\cdot))}{2}}} \left(\underbrace{\operatorname{sen}^2(3x)}_{\substack{\text{Identidad trigonométrica}\\ \operatorname{sen}^2(\cdot)=\frac{1-\cos(2(\cdot))}{2}}}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos(6x)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(6x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1+\cos(6x)}{2}\ \frac{(1-\cos(6x))^2}{4}\ dx = \int \frac{\overbrace{(1+\cos(6x))\ (1-\cos(6x))}^{\substack{\text{Producto notable}\\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2}}\ (1-\cos(6x))}{\underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{8}}\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\underbrace{1-\cos^2(6x)}_{\substack{\text{Identidad trigonométrica}\\ \operatorname{sen}^2(\cdot)+\cos^2(\cdot)=1\\ \text{de aquí, } \operatorname{sen}^2(2x)=1-\cos^2(2x)}}\right)(1-\cos(6x))\ dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(6x)\ (1-\cos(6x))\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\operatorname{sen}^2(6x)-\operatorname{sen}^2(6x)\cos(6x)\right)\ dx \underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx}}{=} \frac{1}{8}\left(\int \operatorname{sen}^2(6x)\ dx - \int \operatorname{sen}^2(6x)\ \cos(6x)\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(6x)\ dx - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(6x)\ \cos(6x)\ dx,$$

Se resuelven las integrales. Para hallar la familia de primitivas de la función $f(x)=\operatorname{sen}^2(6x)$ la primera integral se usa, nuevamente la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2(\cdot)=\frac{1-\cos(2(\cdot))}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}^2(6x)=\frac{1-\cos(12x)}{2}$$

así,

$$\int \operatorname{sen}^2(6x)\ dx = \int \underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{\frac{1-\cos(12x)}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos(12x))\,dx \underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(12x)\ dx,$$

donde,

$$\int dx = x + C_1,$$

mientras que, para la otra integral se propone el cambio de variable

$$u = 12x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 12\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{12} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Se obtiene

$$\int \cos\overbrace{(12x)}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=12x}}\ \overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ \frac{du}{12}=dx}} = \int \cos u\ \underbrace{\frac{du}{12}}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}} = \frac{1}{12}\int \cos u\ du = \frac{1}{12}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{12}\operatorname{sen}(12x) + C_2.$$

así,

$$\int \operatorname{sen}^2(6x)\ dx = \frac{1}{2}(x + C_1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\operatorname{sen}(12x) + C_2\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{24}\operatorname{sen}(12x) + C_3.$$

Por otra parte, para obtener la familia de primitivas de $y = \operatorname{sen}^2(6x)\ \cos(6x)$, se propone el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen}(6x) \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 6\cos(6x)\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{6} = \cos(6x)\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^2(6x)\ \cos(6x)\,dx = \int \left(\overbrace{\operatorname{sen}(6x)}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\operatorname{sen}(6x)}}\right)^2 \overbrace{\underline{\cos(6x)\,dx}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ \frac{du}{6}=\cos(6x)\ dx}} = \int u^2\ \underbrace{\frac{du}{6}}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}} = \frac{1}{6}\ \overbrace{\underbrace{\int u^2\ du}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=2}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}} = \frac{1}{6}\ \frac{u^3}{3} + C_4$$

$$= \frac{1}{18}\ u^3 + C_4 = \frac{1}{18}\ \operatorname{sen}^3(6x) + C_4,$$

con lo que,

$$\int \operatorname{sen}^2(6x)\ \cos(6x)\,dx = \frac{1}{18}\ \operatorname{sen}^3(6x) + C_4.$$

Por lo tanto,

$$\int \cos^2(3x)\operatorname{sen}^4(3x)\ dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{24}\operatorname{sen}(12x) + C_3\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{18}\ \operatorname{sen}^3(6x) + C_4\right).$$

Luego,

$$\int \cos^2(3x)\,\mathrm{sen}^4(3x)\ dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{192}\,\mathrm{sen}\,(12x) - \frac{1}{144}\ \mathrm{sen}^3(6x) + C.$$

★

Ejemplo 215 *: Integre* $\displaystyle\int \tan^6 x\ \sec^2 x\ dx.$

Solución : Se observa que, la derivada de la función $y = \tan x$ está presente en el integrando, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \tan x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \sec^2 x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^6 x\ \sec^2 x\ dx = \int \Big(\overbrace{\tan x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\tan x}}\Big)^6 \overbrace{\sec^2 x\ dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ du=\sec^2 x\ dx}} = \overbrace{\underbrace{\int u^6\ du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=6}}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}} = \frac{u^7}{7} + C = \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

Luego,

$$\int \tan^6 x\ \sec^2 x\ dx = \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

★

Ejemplo 216 *: Integre* $\displaystyle\int \tan^{1/2} x\ \sec^4 x\ dx.$

Solución : Como la potencia de la secante es par, la integral se escribe como

$$\int \tan^{1/2} x\ \overbrace{\sec^4 x}^{\substack{\text{Potencia par.}\\ \text{Tomar un término } \sec^2 x.}}\ dx = \int \tan^{1/2} x\ \sec^2 x\ \underbrace{\underline{\sec^2 x\ dx}}_{\text{Futuro diferencial.}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\sec^2 x\ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\tan x$, así, cabe la pregunta

$$\int \tan^{1/2} x\ \sec^4 x\ dx = \int \tan^{1/2} x\ \underbrace{\sec^2 x}_{\text{¿Qué hacer con este término?}}\ \underline{\sec^2 x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x,$$

se tiene,

$$\int \tan^{1/2} x \ \sec^2 x \ \underline{\sec^2 x \ dx} = \int \tan^{1/2} x \ \underbrace{\sec^2 x}_{\boxed{\tan^2 x + 1 = \sec^2 x}} \ \underline{\sec^2 x \ dx} = \int \tan^{1/2} x \ \left(\tan^2 x + 1\right) \ \underline{\sec^2 x \ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función tangente y su correspondiente derivada, la función secante al cuadrado, así, se propone el cambio de variable

$$u = \tan x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\sec^2 x \ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^{1/2} x \ \sec^4 x \ dx = \int \tan^{1/2} x \ \left(\tan^2 x + 1\right) \ \underline{\sec^2 x \ dx} = \int \left(\overbrace{\tan x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \tan x}}\right)^{1/2} \left(\left(\overbrace{\tan x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \tan x}}\right)^2 + 1\right) \overbrace{\underline{\sec^2 x \ dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } du = \underline{\sec^2 x \ dx}}}$$

$$= \int u^{1/2} \ \left(u^2 + 1\right) \ du = \int \left(u^{5/2} + u^{1/2}\right) \ du = \overbrace{\underbrace{\int u^{5/2} \ du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{5}{2} \ \text{ y } \ n = \frac{1}{2}}}} + \overbrace{\underbrace{\int u^{1/2} \ du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{5}{2} \ \text{ y } \ n = \frac{1}{2}}}}^{\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}}$$

$$\boxed{\text{Linealidad de la integral} \quad \int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx}$$

$$= \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7} u^{7/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{7} \tan^{7/2} x + \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + C.$$

Luego,

$$\int \tan^{1/2} x \ \sec^4 x \ dx = \frac{2}{7} \tan^{7/2} x + \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + C.$$

★

Ejemplo 217 *: Integre* $\displaystyle\int \tan^4 (ax) \ \sec^6 (ax) \ dx.$

Solución : Como la potencia de la secante es par, la integral se escribe como

$$\int \tan^4 (ax) \ \overbrace{\sec^6}^{\boxed{\text{Potencia par. Tomar un término } \sec^2 (ax).}} (ax) \ dx = \int \tan^4 (ax) \ \sec^4 (ax) \ \underbrace{\sec^2 (ax) \ dx}_{\boxed{\text{Futuro diferencial.}}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\sec^2 (ax) \ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\tan (ax)$, así, cabe la pregunta

$$\int \tan^4(ax)\ \sec^6(ax)\ dx = \int \tan^4(ax)\ \underbrace{\sec^4(ax)}_{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}\ \underline{\sec^2(ax)\ dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\tan^2(\cdot) + 1 = \sec^2(\cdot), \qquad \text{se tiene} \qquad \tan^2(ax) + 1 = \sec^2(ax),$$

por lo que,

$$\int \tan^4(ax)\ \sec^4(ax)\ \underline{\sec^2(ax)\ dx} = \int \tan^4(ax)\ \Big(\underbrace{\sec^2(ax)}_{\boxed{\tan^2(ax)+1=\sec^2(ax)}}\Big)^2\ \underline{\sec^2(ax)\ dx}$$

$$= \int \tan^4(ax)\ \left(\tan^2(ax)+1\right)^2\ \underline{\sec^2(ax)\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función tangente y su correspondiente derivada, la función secante al cuadrado, así, se propone el cambio de variable

$$u = \tan(ax) \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = a\sec^2(ax)\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{a} = \underline{\sec^2(ax)\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^4(ax)\ \sec^4(ax)\ \underline{\sec^2(ax)\ dx} = \int \tan^4(ax)\ \left(\tan^2(ax)+1\right)^2\ \underline{\sec^2(ax)\ dx}$$

$$= \int \Big(\overbrace{\tan(ax)}^{\boxed{\text{Cambio } u=\tan(ax)}}\Big)^4 \left(\Big(\overbrace{\tan(ax)}^{\boxed{\text{Cambio } u=\tan(ax)}}\Big)^2 + 1\right)^2 \overbrace{\underline{\sec^2(ax)\ dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } \frac{du}{a}=\underline{\sec^2(ax)\ dx}}} = \int u^4\left(u^2+1\right)^2\ \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int u^4\left(u^2+1\right)^2\ du$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración

Linealidad de la integral
$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$$= \frac{1}{a}\int u^4\left(u^4+2u^2+1\right)\ du = \frac{1}{a}\int \left(u^8+2u^6+u^4\right)\ du = \frac{1}{a}\left(\int u^8\ du + \int 2u^6\ du + \int u^4\ du\right)$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración

Integrales de una potencia.
Integrales de tabla.

$$= \frac{1}{a}\left(\underbrace{\int u^8\ du} + 2\underbrace{\int u^6\ du} + \underbrace{\int u^4\ du}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{u^9}{9}+\frac{2u^7}{7}+\frac{u^5}{5}\right) + C = \frac{u^9}{9a}+\frac{2u^7}{7a}+\frac{u^5}{5a}+C$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=8, \quad n=6 \ \text{ y } \ n=4}$$

$$= \frac{\tan^9(ax)}{9a} + \frac{2\tan^7(ax)}{7a} + \frac{\tan^5(ax)}{5a} + C.$$

Luego,

$$\int \tan^4(ax)\ \sec^6(ax)\ dx = \frac{\tan^9(ax)}{9a} + \frac{2\tan^7(ax)}{7a} + \frac{\tan^5(ax)}{5a} + C.$$

★

Ejemplo 218 *: Integre* $\displaystyle\int \sec^6(b-ax)\ dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u = b - ax \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ a\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{du}{a} = dx,$$

y la integral queda

$$\int \sec^6\Big(\underbrace{b-ax}_{\substack{\text{Cambio}\\ u=b-ax}}\Big)\ \underbrace{dx}_{\substack{\text{Diferencial}\\ -\frac{du}{a}=dx}} = \int \sec^6 u\ \left(-\frac{du}{a}\right) = \int \sec^6 u\ \Big(\underbrace{-\frac{1}{a}}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}\Big)\ du = -\frac{1}{a}\int \sec^6 u\ du$$

Como la potencia de la secante es par, la integral se escribe como

$$\int \overset{\substack{\text{Potencia par.}\\ \text{Tomar un término } \sec^2 u.}}{\sec^6} u\ du = \int \sec^4 u\ \underbrace{\underline{\sec^2 u\ du}}_{\text{Futuro diferencial.}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\sec^2 u\ du}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\tan u$, así, cabe la pregunta

$$\int \sec^6 u\ du = \int \overbrace{\sec^4 u}^{\text{¿Qué hacer con este término?}}\ \underline{\sec^2 u\ du},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\tan^2 u + 1 = \sec^2 u,$$

se tiene,

$$\int \sec^6 u\ du = \int \sec^4 u\ \underline{\sec^2 u\ du} = \int \Big(\overbrace{\sec^2 u}^{\tan^2 u + 1 = \sec^2 u}\Big)^2\ \underline{\sec^2 u\ du} = \int \left(\tan^2 u + 1\right)^2\ \underline{\sec^2 u\ du}.$$

Se observa que en el nuevo integrando aparece la función tangente y su correspondiente derivada, la función secante al cuadrado, así, se propone el cambio de variable

$$z = \tan u \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = \underline{\sec^2 u\ du},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sec^6 u\ du = \int \left(\sec^2 u\right)^2\ \underline{\sec^2 u\ du} = \int \left(\tan^2 u + 1\right)^2\ \underline{\sec^2 u\ du} = \int \left(\left(\overbrace{\tan u}^{\substack{\text{Cambio}\\ z=\tan u}}\right)^2 + 1\right)^2\ \overbrace{\underline{\sec^2 u\ du}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dz=\underline{\sec^2 u\ du}}}$$

$$= \int \left(z^2+1\right)^2\ dz = \int \left(z^4 + 2z^2 + 1\right)\ dz \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(u)+g(u))\,du = \int f(u)\,du + \int g(u)\,du}}{=} \int z^4\ dz + \int \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{2}z^2\ dz + \int dz$$

$$= \underbrace{\int z^4\ dz}_{\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=4,\ \ n=2\ \ \text{y}\ \ n=0} + 2\underbrace{\int z^2\ dz}_{\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=4,\ \ n=2\ \ \text{y}\ \ n=0} + \underbrace{\int dz}_{\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=4,\ \ n=2\ \ \text{y}\ \ n=0} = \frac{z^5}{5} + 2\ \frac{z^3}{3} + z + C_1 = \frac{1}{5}\tan^5 u + \frac{2}{3}\tan^3 u + \tan u + C_1,$$

Integrales de una potencia. Integrales de tabla.

así,

$$\int \sec^6 u\ du = \frac{1}{5}\tan^5 u + \frac{2}{3}\tan^3 u + \tan u + C_1,$$

por lo que,

$$\int \sec^6 (b-ax)\ dx = -\ \frac{1}{a}\int \sec^6 u\ du = -\ \frac{1}{a}\left[\frac{1}{5}\tan^5 u + \frac{2}{3}\tan^3 u + \tan u + C_1\right]$$

$$= -\ \frac{1}{5a}\tan^5 u\ -\ \frac{2}{3a}\tan^3 u\ -\ \frac{1}{a}\tan u + C,$$

como $u = b - ax$, se tiene

$$\int \sec^6 (b-ax)\ dx = -\ \frac{1}{5a}\tan^5 (b-ax)\ -\ \frac{2}{3a}\tan^3 (b-ax)\ -\ \frac{1}{a}\tan (b-ax) + C.$$

★

Ejemplo 219 *: Integre* $\displaystyle\int \tan^4 (4x)\ dx$

Solución : Como no hay término secante y la potencia de la tangente es par, se escribe la integral como

$$\int \tan^4 (4x)\ dx = \int \tan^2 (4x)\ \tan^2 (4x)\ dx,$$

por la identidad trigonométrica

$$\tan^2 (\cdot) + 1 = \sec^2 (\cdot)\,, \qquad \text{se tiene que} \qquad \tan^2 (\cdot) = \sec^2 (\cdot) - 1,$$

así,

$$\int \tan^4(4x)\ dx = \int \tan^2(4x)\ \overbrace{\tan^2(4x)}^{\boxed{\tan^2(4x)=\sec^2(4x)-1}}\ dx = \int \tan^2(4x)\ \left(\sec^2(4x)-1\right)\ dx$$

$$= \int \left(\tan^2(4x)\ \sec^2(4x) - \tan^2(4x)\right) dx \underset{\uparrow}{=} \int \tan^2(4x)\ \sec^2(4x)\ dx - \int \tan^2(4x)\ dx.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\end{array}}$$

Se resuelven cada una de las nuevas integrales. Para la primera integral, se observa que la derivada de la función $f(x) = \tan(4x)$, salvo una constante, está presente en el integrando, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \tan(4x) \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 4\sec^2(4x)\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{4} = \sec^2(4x)\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^2(4x)\sec^2(4x)\,dx = \int \left(\overbrace{\tan(4x)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio}\\ u=\tan(4x)\end{array}}}\right)^2 \overbrace{\sec^2(4x)\,dx}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Diferencial}\\ \frac{du}{4}=\sec^2(4x)\ dx\end{array}}} = \int u^2\ \frac{du}{4} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}\overbrace{\int u^2\ du}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}\end{array}}} = \frac{1}{4}\frac{u^3}{3} + C_1 = \frac{\tan^3(4x)}{12} + C_1,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}} \qquad \boxed{\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=2}$$

es decir,

$$\int \tan^2(4x)\ \sec^2(4x)\ dx = \frac{\tan^3(4x)}{12} + C_1.$$

Para la segunda integral, se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonométrica

$$\tan^2(\cdot) + 1 = \sec^2(\cdot), \qquad \text{se tiene que} \qquad \tan^2(\cdot) = \sec^2(\cdot) - 1,$$

y se escribe la integral como

$$\int \tan^2(4x)\ dx = \int \left(\sec^2(4x)-1\right)\ dx \underset{\uparrow}{=} \int \sec^2(4x)\ dx - \int dx,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\end{array}}$$

Para obtener $\int \sec^2(4x)\ dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 4x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 4\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{4} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sec^2 \overbrace{(4x)}^{\boxed{\text{Cambio } u=4x}} \overset{\boxed{\text{Diferencial } \frac{du}{4}=dx}}{dx} = \int \sec^2 u \, \frac{du}{4} \underset{\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}{=} \frac{1}{4}\int \sec^2 u \, du = \frac{1}{4}\tan u + C_2 = \frac{1}{4}\tan(4x) + C_2,$$

es decir,

$$\int \sec^2(4x) \; dx = \frac{1}{4}\tan(4x) + C_2.$$

Por otra parte,

$$\int dx = x + C_3,$$

con lo que,

$$\int \tan^2(4x) \; dx = \int \sec^2(4x) \; dx - \int dx = \frac{1}{4}\tan(4x) - x + C_4.$$

Luego,

$$\int \tan^4(4x) \; dx = \frac{1}{12}\tan^3(4x) - \frac{1}{4}\tan(4x) + x + C.$$

★

Ejemplo 220 *: Integre* $\displaystyle\int \tan^5 x \; \sec^2 x \; dx.$

Solución : Se observa que, la derivada de la función $y = \tan x$ está presente en el integrando, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \tan x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \sec^2 x \; dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^5 x \; \sec^2 x \; dx = \int \Big(\overbrace{\tan x}^{\boxed{\text{Cambio } u=\tan x}}\Big)^5 \overbrace{\underline{\sec^2 x \; dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } du=\sec^2 x\, dx}} = \overbrace{\underbrace{\int u^5 \; du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=5}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\tan^6 x}{6} + C.$$

Luego,

$$\int \tan^5 x \; \sec^2 x \; dx = \frac{\tan^6 x}{6} + C.$$

Otra manera de obtener la familia de primitiva de la función $f(x) = \tan^5 x \ \sec^2 x$. En virtud que, la potencia de la tangente es impar, se escribe la integral como

$$\int \overbrace{\tan^5 x}^{\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término } \tan x \ \sec x.}} \ \sec^2 x \ dx = \int \tan^4 x \ \sec x \ \underbrace{\underline{\tan x \ \sec x \ dx}}_{\boxed{\text{Futuro diferencial.}}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\tan x \ \sec x \ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\sec x$, así, cabe la pregunta

$$\int \tan^5 x \ \sec^2 x \ dx = \int \overbrace{\tan^4 x}^{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}} \ \sec x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx},$$

por la identidad trigonométrica

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \text{se tiene que} \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1,$$

así,

$$\int \tan^5 x \ \sec^2 x \ dx = \int \left(\overbrace{\tan^2 x}^{\boxed{\tan^2 x = \sec^2 x - 1}}\right)^2 \sec x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx} = \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \sec x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función secante y su correspondiente derivada, la función tangente por secante, así, se propone el cambio de variable

$$u = \sec x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\tan x \ \sec x \ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^5 x \ \sec^2 x \ dx = \int \left(\tan^2 x\right)^2 \sec x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx} = \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \sec x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx}$$

$$= \int \left(\left(\overbrace{\sec x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \sec x}}\right)^2 - 1\right)^2 \overbrace{\sec x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \sec x}} \ \overbrace{\underline{\tan x \ \sec x \ dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } du = \underline{\tan x \ \sec x \ dx}}} = \int \left(u^2 - 1\right)^2 u \ du = \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) u \ du$$

$$= \int \left(u^5 - 2u^3 + u\right) \ du \overset{\boxed{\text{Linealidad de la integral } \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}{=} \int u^5 \ du - \int \underset{\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}{2u^3} \ du + \int u \ du = \overbrace{\underbrace{\int u^5 \ du}} - 2 \overbrace{\underbrace{\int u^3 \ du}} + \overbrace{\underbrace{\int u \ du}}^{\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}}$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 5, \quad n = 3 \ \text{ y } \ n = 1}$$

$$= \frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{2} + \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^6 x}{6} - \frac{\sec^4 x}{2} + \frac{\sec^2 x}{2} + C.$$

Luego,

$$\int \tan^5 x \ \sec^2 x \ dx = \frac{\sec^6 x}{6} - \frac{\sec^4 x}{2} + \frac{\sec^2 x}{2} + C.$$

★

Ejemplo 221 *: Integre* $\displaystyle\int \tan^3 x \ \sec^{1/2} x \ dx.$

Solución : Como la potencia de la tangente es impar, entonces se debe tomar un término $\tan x \sec x$ y transformamos los demás términos en secante, pero observemos que el término $\sec x$ que se necesita no aparece, así, multiplicamos y dividimos, el integrando, por $\sec x$ y obtenemos

$$\int \tan^3 x \ \sec^{1/2} x \ dx = \int \tan^3 x \ \sec^{1/2} x \ \frac{1}{\sec x} \ \sec x \ dx = \int \tan^3 x \ \sec^{-1/2} x \ \sec x \ dx,$$

así, se tiene

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Potencia impar.}\\ \text{Tomar un término } \tan x \ \sec x.\end{array}}$$

$$\int \tan^3 x \ \sec^{1/2} x \ dx = \int \tan^2 x \ \sec^{-1/2} x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx}$$

$$\boxed{\text{Futuro diferencial.}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\tan x \ \sec x \ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\sec x$, así, cabe la pregunta

$$\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}$$

$$\int \tan^3 x \ \sec^{1/2} x \ dx = \int \overbrace{\tan^2 x} \ \sec^{-1/2} x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx},$$

por la identidad trigonométrica

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \text{se tiene que} \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1,$$

así,

$$\boxed{\tan^2 x = \sec^2 x - 1}$$

$$\int \tan^3 x \ \sec^{1/2} x \ dx = \int \overbrace{\tan^2 x} \ \sec^{-1/2} x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx} = \int \left(\sec^2 x - 1\right) \ \sec^{-1/2} x \ \underline{\tan x \ \sec x \ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función secante y su correspondiente derivada, la función tangente por secante, así, se propone el cambio de variable

$$u = \sec x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\tan x \ \sec x \ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^3 x\ \sec^{1/2} x\ dx = \int \tan^2 x\ \sec^{-1/2} x\ \underline{\tan x\ \sec x\ dx} = \int \left(\sec^2 x - 1\right)\ \sec^{-1/2} x\ \underline{\tan x\ \sec x\ dx}$$

$$= \int \left(\left(\overbrace{\sec x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\sec x}}\right)^2 - 1\right)\left(\overbrace{\sec x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\sec x}}\right)^{-1/2} \overbrace{\underline{\tan x\ \sec x\ dx}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ du=\underline{\tan x\ \sec x\ dx}}} = \int \left(u^2-1\right) u^{-1/2}\ du = \underbrace{\int \left(u^{3/2} - u^{-1/2}\right) du}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}}$$

$$= \overbrace{\underbrace{\int u^{3/2}\ du}}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}}} - \overbrace{\underbrace{\int u^{-1/2}\ du}}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}}} = \frac{2}{5}\ u^{5/2} - 2u^{1/2} + C = \frac{2}{5}\ \sec^{5/2} x - 2\sec^{1/2} x + C.$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{2}{3}\ \text{ y }\ n = -\frac{1}{2}}$$

Luego,

$$\int \tan^3 x\ \sec^{1/2} x\ dx = \frac{2}{5}\ \sec^{5/2} x - 2\sec^{1/2} x + C.$$

★

Ejemplo 222 *: Integre* $\int \tan^5 x\ dx.$

Solución : Como la potencia de la tangente es impar, entonces se debe tomar un término $\tan x \sec x$ y transformamos los demás términos en secante, pero observemos que el término $\sec x$ que se necesita no aparece, así, multiplicamos y dividimos, el integrando, por $\sec x$ y obtenemos

$$\int \tan^5 x\ dx = \int \tan^5 x\ \frac{1}{\sec x}\ \sec x\ dx = \int \frac{\tan^5 x}{\sec x}\ \sec x\ dx,$$

así, se tiene

$$\int \overbrace{\tan^5 x}^{\substack{\text{Potencia impar.}\\ \text{Tomar un término } \tan x\ \sec x.}}\ dx = \int \frac{\tan^4 x}{\sec x}\ \underbrace{\underline{\tan x\ \sec x\ dx}}_{\text{Futuro diferencial.}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\tan x\ \sec x\ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\sec x$, así, cabe la pregunta

$$\int \tan^5 x\ dx = \int \overbrace{\frac{\tan^4 x}{\sec x}}^{\text{¿Qué hacer con este término?}}\ \underline{\tan x\ \sec x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \text{se tiene que} \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1,$$

así,

$$\int \tan^5 x\ dx = \int \frac{\tan^4 x}{\sec x}\ \underline{\tan x\ \sec x\ dx} = \int \frac{\left(\overbrace{\tan^2 x}^{\boxed{\tan^2 x = \sec^2 x - 1}}\right)^2}{\sec x}\ \underline{\tan x\ \sec x\ dx} = \int \frac{\left(\sec^2 x - 1\right)^2}{\sec x}\ \underline{\tan x\ \sec x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función secante y su correspondiente derivada, la función tangente por secante, así, se propone el cambio de variable

$$u = \sec x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\tan x\ \sec x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^5 x\ dx = \int \frac{\tan^4 x}{\sec x}\ \underline{\tan x\ \sec x\ dx} = \int \frac{\left(\sec^2 x - 1\right)^2}{\sec x}\ \underline{\tan x\ \sec x\ dx}$$

$$= \int \frac{\left(\left(\overbrace{\sec x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \sec x}}\right)^2 - 1\right)^2}{\underbrace{\sec x}_{\boxed{\text{Cambio } u = \sec x}}}\ \overbrace{\underline{\tan x\ \sec x\ dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } du = \underline{\tan x\ \sec x\ dx}}} = \int \frac{\left(u^2 - 1\right)^2}{u}\ du = \int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{u}\ du$$

$$\underset{\boxed{\text{Propiedades de los racionales } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}}}{=} \int \left(\frac{u^4}{u} - \frac{2u^2}{u} + \frac{1}{u}\right)\ du = \int \left(u^3 - 2u + \frac{1}{u}\right)\ du \underset{\boxed{\text{Linealidad de la integral } \int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}}{=} \int u^3\ du - \int \underset{\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}{2u}\ du + \int \frac{1}{u}\ du$$

$$= \underbrace{\overbrace{\int u^3\ du}^{\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}}}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 3 \ \text{ y } \ n = 1}} - 2\ \underbrace{\overbrace{\int u\ du}^{\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}}} + \overbrace{\int \frac{du}{u}}^{\boxed{\text{Logaritmo natural.}}} = \frac{u^4}{4} - 2\ \frac{u^2}{2} + \ln|u| + C = \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \ln|\sec x| + C.$$

Luego,

$$\int \tan^5 x\ dx = \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \ln|\sec x| + C.$$

★

Ejemplo 223 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^4 x\ \csc^2 x\ dx.$

Solución : Se observa que, la derivada de la función $y = \cot x$ está presente en el integrando, salvo una constante, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \cot x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \csc^2 x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \csc^2 x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^4 x\ \csc^2 x\ dx = \int \Big(\overbrace{\cot x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\cot x}}\Big)^4\ \overbrace{\csc^2 x\ dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ -\ du=\csc^2 x\ dx}} = \int u^4\ \underbrace{(-\ du)}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}} = -\underbrace{\overbrace{\int u^4\ du}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}}}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=4} = -\ \frac{u^5}{5} + C = -\ \frac{\cot^5 x}{5} + C.$$

Luego,

$$\int \cot^4 x\ \csc^2 x\ dx = -\ \frac{\cot^5 x}{5} + C.$$

★

Ejemplo 224 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^7 x\ \csc^2 x\ dx.$

Solución : Se observa que, la derivada de la función $y = \cot x$ está presente en el integrando, salvo una constante, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \cot x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \csc^2 x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \csc^2 x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^7 x\ \csc^2 x\ dx = \int \Big(\overbrace{\cot x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\cot x}}\Big)^7\ \overbrace{\csc^2 x\ dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ -\ du=\csc^2 x\ dx}} = \int u^7\ \underbrace{(-\ du)}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}} = -\underbrace{\overbrace{\int u^7\ du}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}}}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=7} = -\ \frac{u^8}{8} + C = -\ \frac{\cot^8 x}{8} + C.$$

Luego,

$$\int \cot^7 x\ \csc^2 x\ dx = -\ \frac{\cot^8 x}{8} + C.$$

★

Ejemplo 225 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^6 x\ \csc^6 x\ dx.$

Solución : Como la potencia de la cosecante es par, la integral se escribe como

$$\int \cot^6 x\ \overset{\substack{\boxed{\text{Potencia par.}\\ \text{Tomar un término } \csc^2 x.}}\\ \downarrow}{\csc^6} x\ dx = \int \cot^6 x\ \csc^4 x\ \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Futuro diferencial,}\\ \text{salvo una constante negativa.}}}}{\underline{\csc^2 x\ dx}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\csc^2 x\ dx}$, salvo una constante negativa, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\cot x$, así, cabe la pregunta

$$\int \cot^6 x\ \csc^6 x\ dx = \int \cot^6 x\ \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}}{\underbrace{\csc^4 x}}\ \underline{\csc^2 x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x,$$

por lo que,

$$\int \cot^6 x\ \csc^4 x\ \underline{\csc^2 x\ dx} = \int \cot^6 x\ \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{1+\cot^2 x = \csc^2 x}}}{\underbrace{\csc^2 x}}\Big)^2\ \underline{\csc^2 x\ dx} = \int \cot^6 x\ \left(1+\cot^2 x\right)^2\ \underline{\csc^2 x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función cotangente y su correspondiente derivada, la función cosecante al cuadrado, salvo una constante negativa, así, se propone el cambio de variable

$$u = \cot x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \csc^2 x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \underline{\csc^2 x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^6 x\ \csc^4 x\ \underline{\csc^2 x\ dx} = \int \cot^6 x\ \left(1+\cot^2 x\right)^2\ \underline{\csc^2 x\ dx}$$

$$= \int \Big(\overset{\substack{\boxed{\text{Cambio}\\ u=\cot x}}\\ \downarrow}{\cot x}\Big)^6 \left(1 + \Big(\overset{\substack{\boxed{\text{Cambio}\\ u=\cot x}}\\ \downarrow}{\cot x}\Big)^2\right)^2 \overset{\substack{\boxed{\text{Diferencial}\\ -\ du = \underline{\csc^2 x\ dx}}}\\ \downarrow}{\underline{\csc^2 x\ dx}} = \int u^6\ \left(1+u^2\right)^2\ (\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{-}\ du) = -\int u^6\ \left(1+u^2\right)^2\ du$$

$$= -\int u^6\ \left(1+2u^2+u^4\right)\ du = -\int \left(u^6+2u^8+u^{10}\right)\ du \overset{\boxed{\text{Linealidad de la integral}\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}}{=} -\left(\int u^6\ du + \int \overset{\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}{2}u^8\ du + \int u^{10}\ du\right)$$

$$= -\left(\underbrace{\int u^6\ du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=6,\ \ n=8\ \ \text{y}\ \ n=10}} + 2\underbrace{\int u^8\ du}_{\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}} + \underbrace{\int u^{10}\ du}\right) = -\left(\frac{u^7}{7}+\frac{2u^9}{9}+\frac{u^{11}}{11}\right)+C = -\frac{u^7}{7}-\frac{2u^9}{9}-\frac{u^{11}}{11}+C$$

$$= -\frac{\cot^7 x}{7} - \frac{2\cot^9 x}{9} - \frac{\cot^{11} x}{11} + C.$$

Luego,

$$\int \cot^6 x\ \csc^6 x\ dx = -\frac{\cot^7 x}{7} - \frac{2\cot^9 x}{9} - \frac{\cot^{11} x}{11} + C.$$

★

Ejemplo 226 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^3 x\ \csc^8 x\ dx.$

Solución : Como la potencia de la cosecante es par, la integral se escribe como

$$\int \cot^3 x\ \overset{\boxed{\text{Potencia par. Tomar un término } \csc^2 x.}}{\csc^8} x\ dx = \int \cot^3 x\ \csc^6 x\ \underbrace{\underline{\csc^2 x\ dx}}_{\boxed{\text{Futuro diferencial, salvo una constante negativa.}}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\csc^2 x\ dx}$, salvo una constante negativa, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\cot x$, así, cabe la pregunta

$$\int \cot^3 x\ \csc^8 x\ dx = \int \cot^3 x\ \underbrace{\csc^6 x}_{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}\ \underline{\csc^2 x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$1+\cot^2 x = \csc^2 x,$$

por lo que,

$$\int \cot^3 x\ \csc^6 x\ \underline{\csc^2 x\ dx} = \int \cot^3 x\ \left(\underbrace{\csc^3 x}_{\boxed{1+\cot^2 x = \csc^2 x}}\right)^2\ \underline{\csc^2 x\ dx} = \int \cot^3 x\ \left(1+\cot^2 x\right)^3\ \underline{\csc^2 x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función cotangente y su correspondiente derivada, la función cosecante al cuadrado, salvo una constante negativa, así, se propone el cambio de variable

$$u = \cot x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \csc^2 x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \underline{\csc^2 x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^3 x\ \csc^6 x\ \underline{\csc^2 x\ dx} = \int \cot^3 x\ \left(1+\cot^2 x\right)^3\ \underline{\csc^2 x\ dx} = \int \left(\overbrace{\cot x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\cot x}}\right)^3 \left(1+\left(\overbrace{\cot x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\cot x}}\right)^2\right)^3 \overbrace{\underline{\csc^2 x\ dx}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ -\ du=\underline{\csc^2 x\ dx}}}$$

$$= \int u^3\ \left(1+u^2\right)^3\ \left(\overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{-}\ du\right) = -\int u^3\ \left(1+u^2\right)^3\ du = -\int u^3\ \left(1+3u^2+3u^4+u^6\right)\ du$$

$$= -\int \left(u^3+3u^5+3u^7+u^9\right)\ du \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}}{=} -\left(\int u^3\ du + \int \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{3}u^5\ du + \int \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{3}u^7\ du + \int u^9\ du\right)$$

$$= -\left(\overbrace{\int u^3\ du}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}}} + 3\ \overbrace{\int u^5\ du}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}}} + 3\ \overbrace{\int u^7\ du}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}}} + \overbrace{\int u^9\ du}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}}}\right) = -\left(\frac{u^4}{4}+3\ \frac{u^6}{6}+3\ \frac{u^8}{8}+\frac{u^{10}}{10}\right)+C$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=3,\quad n=5,\quad n=7 \ \text{ y } \ n=9}$$

$$= -\ \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{2} - \frac{3u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} + C = -\ \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^6 x}{2} - \frac{3\cot^8 x}{8} - \frac{\cot^{10} x}{10} + C.$$

Luego,

$$\int \cot^3 x\ \csc^8 x\ dx = -\ \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^6 x}{2} - \frac{3\cot^8 x}{8} - \frac{\cot^{10} x}{10} + C.$$

Otra manera de obtener la familia de primitiva de la función $f(x) = \cot^3 x\ \csc^8 x$, es, en virtud que la potencia de la cotangente es impar, escribir la integral como

$$\int \overset{\substack{\text{Potencia impar.}\\ \text{Tomar un término } \cot x\ \csc x.}}{\cot^3 x}\ \csc^8 x\ dx = \int \cot^2 x\ \csc^7 x\ \underset{\substack{\text{Futuro diferencial.}}}{\underline{\cot x\ \csc x\ dx}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cot x\ \csc x\ dx}$, salvo una constante negativa, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\csc x$, así, cabe la pregunta

$$\int \cot^3 x\ \csc^8 x\ dx = \int \overbrace{\cot^2 x}^{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}\ \csc^7 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica

$$1+\cot^2 x = \csc^2 x, \qquad \text{se tiene que} \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1,$$

así,

$$\int \cot^3 x\ \csc^8 x\ dx = \int \overbrace{\cot^2 x}^{\boxed{\cot^2 x = \csc^2 x - 1}}\ \csc^7 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} = \int \left(\csc^2 x - 1\right)\ \csc^7 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función cosecante y su correspondiente derivada salvo una constante negativa, la función cotangente por cosecante, así, se propone el cambio de variable

$$u = \csc x \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad du = -\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} \quad \Longrightarrow \quad -\ du = \underline{\cot x\ \csc x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^3 x\ \csc^8 x\ dx = \int \cot^2 x \csc^7 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} = \int \left(\csc^2 x - 1\right) \csc^7 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx}$$

$$= \int \left(\left(\overbrace{\csc x}^{\boxed{\text{Cambio } u=\csc x}}\right)^2 - 1\right)\left(\overbrace{\csc x}^{\boxed{\text{Cambio } u=\csc x}}\right)^7 \overbrace{\underline{\cot x\ \csc x\ dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } -\ du = \underline{\cot x\ \csc x\ dx}}} = \int \left(u^2-1\right)\ u^7\ (\underset{\uparrow}{-}\ du) = -\int \left(u^2-1\right)\ u^7\ du$$

$$\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}$$

$$\boxed{\text{Linealidad de la integral } \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

$$= -\int \left(u^9 - u^7\right)\ du \overset{\downarrow}{=} -\left(\underbrace{\int u^9\ du}_{} - \underbrace{\int u^7\ du}_{}\right) = -\ \frac{u^{10}}{10} + \frac{u^8}{8} + C = -\ \frac{\csc^{10} x}{10} + \frac{\csc^8 x}{8} + C.$$

$$\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=9, \ \text{y} \ n=7}$$

Luego,

$$\int \cot^3 x\ \csc^8 x\ dx = -\ \frac{\csc^{10} x}{10} + \frac{\csc^8 x}{8} + C.$$

★

Ejemplo 227 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^9 x\ \csc^6 x\ dx.$

Solución : Puesto que, la potencia de la cotangente es impar, se escribe la integral como

$$\int \overset{\substack{\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término } \cot x\ \csc x.}}\\ \downarrow}{\cot^9 x}\ \csc^6 x\ dx = \int \cot^8 x\ \csc^5 x\ \underbrace{\cot x\ \csc x\ dx}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Futuro diferencial.}}}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cot x\ \csc x\ dx}$, salvo una constante negativa, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\csc x$, así, cabe la pregunta

$$\int \cot^9 x\ \csc^6 x\ dx = \int \overbrace{\cot^8 x}^{\substack{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}\\ \downarrow}}\ \csc^5 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \qquad \text{se tiene que} \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1,$$

así,

$$\int \cot^9 x\ \csc^6 x\ dx = \int \left(\overbrace{\cot^2 x}^{\substack{\boxed{\tan^2 x = \sec^2 x - 1}\\ \downarrow}}\right)^4 \csc^5 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} = \int \left(\csc^2 x - 1\right)^4 \csc^5 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función cosecante y su correspondiente derivada salvo una constante negativa, la función cotangente por cosecante, así, se propone el cambio de variable

$$u = \csc x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \underline{\cot x\ \csc x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^9 x\ \csc^6 x\ dx = \int \left(\cot^2 x\right)^4 \csc^5 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} = \int \left(\csc^2 x - 1\right)^4 \csc^5 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx}$$

$$= \int \left(\left(\overbrace{\csc x}^{\substack{\boxed{\text{Cambio } u = \csc x}}\\ \downarrow}\right)^2 - 1\right)^4 \left(\overbrace{\csc x}^{\substack{\boxed{\text{Cambio } u = \csc x}}\\ \downarrow}\right)^5 \overbrace{\underline{\cot x\ \csc x\ dx}}^{\substack{\boxed{\text{Diferencial } -\ du = \underline{\cot x\ \csc x\ dx}}\\ \downarrow}} = \int \left(u^2 - 1\right)^4\ u^5\ (\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}}{-}\ du) = -\int \left(u^2 - 1\right)^4\ u^5\ du$$

$$= -\int \left(u^8 - 4u^6 + 6u^4 - 4u^2 + 1\right)\ u^5\ du = -\int \left(u^{13} - 4u^{11} + 6u^9 - 4u^7 + u^5\right)\ du$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx\end{array}}$$

$$\overset{\downarrow}{=}-\left(\int u^{13}\,du-\int \underset{\uparrow}{4}u^{11}\,du+\int \underset{\uparrow}{6}u^{9}\,du-\int \underset{\uparrow}{4}u^{7}\,du+\int u^{5}\,du\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}\end{array}}\qquad\boxed{\begin{array}{c}\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}\end{array}}$$

$$=-\left(\overbrace{\int u^{13}\,du}-4\,\overbrace{\int u^{11}\,du}+6\,\overbrace{\int u^{9}\,du}-4\,\overbrace{\int u^{7}\,du}+\overbrace{\int u^{5}\,du}\right)$$

$$\boxed{\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\quad\text{con}\quad n=13,\quad n=11,\quad n=9,\quad n=7\ \text{ y }\ n=5}$$

$$=-\left(\frac{u^{14}}{14}-4\,\frac{u^{12}}{12}+6\,\frac{u^{10}}{10}-4\,\frac{u^{8}}{8}+\frac{u^{6}}{6}\right)+C=-\,\frac{u^{14}}{14}+\frac{u^{12}}{3}-3\,\frac{u^{10}}{5}+\frac{u^{8}}{2}-\frac{u^{6}}{6}+C$$

$$=-\,\frac{\csc^{14}x}{14}+\frac{\csc^{12}x}{3}-\frac{3}{5}\,\csc^{10}x+\frac{\csc^{8}x}{2}-\frac{\csc^{6}x}{6}+C.$$

Luego,

$$\int \cot^9 x\ \csc^6 x\ dx=-\,\frac{\csc^{14}x}{14}+\frac{\csc^{12}x}{3}-\frac{3}{5}\,\csc^{10}x+\frac{\csc^{8}x}{2}-\frac{\csc^{6}x}{6}+C.$$

★

Ejemplo 228 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^5 x\ \csc^5 x\ dx.$

Solución : Como la potencia de la cotangente es impar, se escribe la integral como

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Potencia impar.}\\ \text{Tomar un término }\ \cot x\ \csc x.\end{array}}$$

$$\int \overset{\downarrow}{\cot^5 x}\ \csc^5 x\ dx=\int \cot^4 x\ \csc^4 x\ \underset{\uparrow}{\underline{\cot x\ \csc x\ dx}}$$

$$\boxed{\text{Futuro diferencial.}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cot x\ \csc x\ dx}$, salvo una constante negativa, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\csc x$, así, cabe la pregunta

$$\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}$$

$$\int \cot^5 x\ \csc^5 x\ dx=\int \overbrace{\cot^4 x}\ \csc^4 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica

$$1+\cot^2 x=\csc^2 x,\qquad\text{se tiene que}\qquad \cot^2 x=\csc^2 x-1,$$

así,

$$\int \cot^5 x\ \csc^5 x\ dx = \int \left(\overbrace{\cot^2 x}^{\boxed{\cot^2 x = \csc^2 x - 1}}\right)^2 \csc^4 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} = \int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \csc^4 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función cosecante y su correspondiente derivada salvo una constante negativa, la función cotangente por cosecante, así, se propone el cambio de variable

$$u = \csc x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \underline{\cot x\ \csc x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^5 x\ \csc^5 x\ dx = \int \left(\cot^2 x\right)^2 \csc^4 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} = \int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \csc^4 x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx}$$

$$= \int \left(\left(\overbrace{\csc x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \csc x}}\right)^2 - 1\right)^2 \left(\overbrace{\csc x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \csc x}}\right)^4 \overbrace{\underline{\cot x\ \csc x\ dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } -\ du = \underline{\cot x\ \csc x\ dx}}} = \int \left(u^2 - 1\right)^2\ u^4\ (\underset{\uparrow}{-}\ du) = -\int \left(u^2 - 1\right)^2\ u^4\ du$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

$$= -\int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right)\ u^4\ du = -\int \left(u^8 - 2u^6 + u^4\right)\ du \underset{\uparrow}{=} -\left(\int u^8\ du - \int \underset{\uparrow}{2}u^6\ du + \int u^4\ du\right)$$

Linealidad de la integral
$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

Integrales de una potencia.
Integrales de tabla.

$$= -\left(\underbrace{\int u^8\ du}\ -\ 2\ \underbrace{\int u^6\ du}\ +\ \underbrace{\int u^4\ du}\right) = -\ \left(\frac{u^9}{9} - 2\ \frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5}\right) + C$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 8, \quad n = 6 \ \text{ y } \ n = 4}$$

$$= -\frac{u^9}{9} + \frac{2u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C = -\ \frac{\csc^9 x}{9} + \frac{2\csc^7 x}{7} - \frac{\csc^5 x}{5} + C.$$

Luego,

$$\int \cot^5 x\ \csc^5 x\ dx = -\ \frac{\csc^9 x}{9} + \frac{2\csc^7 x}{7} - \frac{\csc^5 x}{5} + C.$$

★

Ejemplo 229 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^5 x\ \csc^{1/5} x\ dx.$

Solución : Como la potencia de la cotangente es impar, entonces se debe tomar un término $\cot x\ \csc x$ y transformar los demás términos en cosecante, pero se observa que el término $\csc x$ que se necesita no aparece, así, se multiplica y se divide, el integrando, por $\csc x$ y se obtiene

$$\int \cot^5 x\ \csc^{1/5} x\ dx = \int \cot^5 x\ \csc^{1/5} x\ \frac{1}{\csc x}\ \csc x\ dx = \int \cot^5 x\ \csc^{-4/5} x\ \csc x\ dx,$$

de aquí,

$$\int \overset{\substack{\text{Potencia impar.}\\ \text{Tomar un término } \cot x\ \csc x.}}{\cot^5 x}\ \csc^{1/5} x\ dx = \int \cot^4 x\ \csc^{-4/5} x\ \underbrace{\underline{\cot x\ \csc x\ dx}}_{\text{Futuro diferencial.}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cot x\ \csc x\ dx}$, salvo una constante negativa, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\csc x$, así, cabe la pregunta

$$\int \cot^5 x\ \csc^{1/5} x\ dx = \int \overbrace{\cot^4 x}^{\text{¿Qué hacer con este término?}}\ \csc^{-4/5} x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx},$$

por la identidad trigonométrica

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \qquad \text{se tiene que} \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1,$$

así,

$$\int \cot^5 x\ \csc^{1/5} x\ dx = \int \left(\overbrace{\cot^2 x}^{\cot^2 x = \csc^2 x - 1}\right)^2 \csc^{-4/5} x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} = \int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \csc^{-4/5} x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función cosecante y su correspondiente derivada salvo una constante negativa, la función cotangente por cosecante, así, se propone el cambio de variable

$$u = \csc x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \underline{\cot x\ \csc x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^5 x\ \csc^{1/5} x\ dx = \int \cot^4 x\ \csc^{-4/5} x\ \underline{\cot x\ \csc x\ dx} = \int \left(\left(\overbrace{\csc x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u = \csc x}}\right)^2 - 1\right)^2 \left(\overbrace{\csc x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u = \csc x}}\right)^{-4/5} \overbrace{\underline{\cot x\ \csc x\ dx}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ -\ du = \underline{\cot x\ \csc x\ dx}}}$$

$$= \int \left(u^2 - 1\right)^2 u^{-4/5} \left(\overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{-}\ du\right) = -\int \left(u^2 - 1\right)^2 u^{-4/5}\ du = -\int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right)\ u^{-4/5}\ du$$

$$= -\int \left(u^{16/5} - 2u^{6/5} + u^{-4/5}\right)\, du \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}}{=} -\left(\int u^{16/5}\, du - \int 2u^{6/5}\, du + \int u^{-4/5}\, du\right)$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

Integrales de una potencia.
Integrales de tabla.

$$= \underbrace{\int u^{16/5}\, du} - 2\underbrace{\int u^{6/5}\, du} + \underbrace{\int u^{-4/5}\, du} = \frac{u^{21/5}}{\frac{21}{5}} - 2\,\frac{u^{11/5}}{\frac{11}{5}} + \frac{u^{1/5}}{\frac{1}{5}} + C$$

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{16}{5},\ \ n = \frac{6}{5} \ \text{ y } \ n = -\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{5}{21}\, u^{21/5} - \frac{10}{11}\, u^{11/5} + 5u^{1/5} + C = \frac{5}{21}\, \csc^{21/5} x - \frac{10}{11}\, \csc^{11/5} x + 5\csc^{1/5} x + C.$$

Luego,

$$\int \cot^5 x\ \csc^{1/5} x\ dx = \frac{5}{21}\, \csc^{21/5} x - \frac{10}{11}\, \csc^{11/5} x + 5\csc^{1/5} x + C.$$

★

Ejemplo 230 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^3\left(\frac{x}{2}\right)\, dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u = \frac{x}{2} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{1}{2}\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad 2\ du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^3\left(\overset{\substack{\text{Cambio} \\ u = \frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)\, \overset{\substack{\text{Diferencial} \\ 2\ du = dx}}{dx} = \int \cot^3 u\ \underset{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}{(2\ du)} = 2\int \cot^3 u\ du$$

Como la potencia de la cotangente es impar, entonces se debe tomar un término $\cot u\ \csc u$ y transformar los demás términos en cosecante, pero se observa que el término $\csc u$ que se necesita no aparece en el integrando, así, se multiplica y se divide, dicho integrando, por $\csc u$ y se obtiene

$$\int \cot^3 u\ du = \int \cot^3 u\ \frac{1}{\csc u}\ \csc u\ du = \int \cot^2 u\ (\csc u)^{-1}\ \underline{\cot u\ \csc u\ du},$$

se debe ser cuidadoso con el término $(\csc u)^{-1}$, que aparece en la última integral de la igualdad anterior, ya que, dicho término representa el inverso multiplicativo de la función $f(u) = \csc u$ y **no** su función inversa.

Así, se tiene

$$\int \overset{\substack{\text{Potencia impar.}\\ \text{Tomar un término } \cot u \ \csc u.}}{\cot^3 u}\ du = \int \cot^2 u\ (\csc u)^{-1}\ \underbrace{\cot u\ \csc u\ du}_{\substack{\uparrow\\ \text{Futuro diferencial.}}}$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cot u\ \csc u\ du}$, salvo una constante negativa, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\csc u$, así, cabe la pregunta

$$\int \cot^3 u\ du = \int \overbrace{\cot^2 u}^{\text{¿Qué hacer con este término?}}\ (\csc u)^{-1}\ \underline{\cot u\ \csc u\ du},$$

por la identidad trigonométrica

$$1 + \cot^2 u = \csc^2 u, \qquad \text{se tiene que} \qquad \cot^2 u = \csc^2 u - 1,$$

así,

$$\int \cot^3 u\ du = \int \overbrace{\cot^2 u}^{\cot^2 u = \csc^2 u - 1}\ (\csc u)^{-1}\ \underline{\cot u\ \csc u\ du} = \int \left(\csc^2 u - 1\right)\ (\csc u)^{-1}\ \underline{\cot u\ \csc u\ du}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función cosecante y su correspondiente derivada salvo una constante negativa, la función cotangente por cosecante, así, se propone el cambio de variable

$$z = \csc u \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = -\ \underline{\cot u\ \csc u\ du} \qquad \Longrightarrow \qquad -\ dz = \underline{\cot u\ \csc u\ du},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^3 u\ du = \int \cot^2 u\ (\csc u)^{-1}\ \underline{\cot u\ \csc u\ du} = \int \left(\left(\overbrace{\csc u}^{\substack{\text{Cambio}\\ z = \csc u}}\right)^2 - 1\right)\ \left(\overbrace{\csc u}^{\substack{\text{Cambio}\\ z = \csc u}}\right)^{-1}\ \overbrace{\underline{\cot u\ \csc u\ du}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ -\ dz = \underline{\cot u\ \csc u\ du}}}$$

$$= \int \left(z^2 - 1\right)\ z^{-1}\ (\overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{-}\ dz) = -\int \left(z^2 - 1\right) z^{-1}\ dz = -\int \left(z - z^{-1}\right) dz = -\left(\overbrace{\int z\ dz}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}} - \overbrace{\int z^{-1}\ dz}^{\substack{\text{Logaritmo}\\ \text{natural.}}}\right)$$

$$\boxed{\text{Linealidad de la integral} \quad \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx} \qquad \boxed{\int z^n\, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 1}$$

$$= -\left(\frac{z^2}{2} - \ln|z|\right) + C = -\frac{z^2}{2} + \ln|z| + C = -\frac{\csc^2 u}{2} + \ln|\csc u| + C,$$

por lo que,

$$\int \cot^3 u \; du = -\frac{\csc^2 u}{2} + \ln|\csc u| + C,$$

como, $u = \dfrac{x}{2}$, se tiene

$$\int \cot^3\left(\frac{x}{2}\right) \; dx = 2\left[-\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left|\csc\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right] + C = -\csc^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left|\csc\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Luego,

$$\int \cot^3\left(\frac{x}{2}\right) \; dx = -\csc^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left|\csc\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

★

Ejemplo 231 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^6(3x) \; dx.$

Solución : Como no hay término cosecante y la potencia de la cotangente es par, se escribe la integral como

$$\int \cot^6(3x) \; dx = \int \cot^4(3x) \; \cot^2(3x) \; dx,$$

por la identidad trigonométrica

$$1 + \cot^2(\cdot) = \csc^2(\cdot), \qquad \text{se tiene que} \qquad \cot^2(\cdot) = \csc^2(\cdot) - 1,$$

así,

$$\int \cot^6(3x) \; dx = \int \cot^4(3x) \; \overbrace{\cot^2(3x)}^{\boxed{\cot^2(3x) = \csc^2(3x) - 1}} \; dx = \int \cot^4(3x) \; \left(\csc^2(3x) - 1\right) \; dx$$

$$= \int \left(\cot^4(3x)\csc^2(3x) \; - \; \cot^4(3x)\right) \; dx \underset{\uparrow}{=} \int \cot^4(3x) \; \csc^2(3x) \; dx - \int \cot^4(3x) \; dx.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\end{array}}$$

Se resuelven cada una de las nuevas integrales. Para la primera integral, se observa que la derivada de la función $f(x) = \cot(3x)$, salvo una constante, está presente en el integrando, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \cot(3x) \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -3\csc^2(3x) \; dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{du}{3} = \csc^2(3x) \; dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^4(3x) \; \csc^2(3x) \; dx = \int \left(\overbrace{\cot(3x)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio}\\ u = \cot(3x)\end{array}}}\right)^4 \overbrace{\csc^2(3x)\, dx}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Diferencial}\\ -\frac{du}{3} = \csc^2(3x) \; dx\end{array}}} = \int u^4 \left(-\frac{du}{3}\right) = \int u^4 \overbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}} \; du$$

$$= -\frac{1}{3}\overbrace{\underbrace{\int u^4\ du}_{\boxed{\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=4}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} = -\frac{1}{3}\ \frac{u^5}{5} + C_1 = -\frac{\cot^5(3x)}{15} + C_1,$$

es decir,

$$\int \cot^4(3x)\ \csc^2(3x)\ dx = -\frac{\cot^5(3x)}{15} + C_1.$$

Para la segunda integral, $\int \cot^4(3x)\ dx.$ se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonométrica

$$1+\cot^2(\cdot) = \csc^2(\cdot), \qquad \text{se tiene que} \qquad \cot^2(\cdot) = \csc^2(\cdot) - 1,$$

y se escribe la integral como

$$\int \cot^4(3x)\ dx = \int \cot^2(3x)\ \overbrace{\cot^2(3x)}^{\boxed{\cot^2(3x)=\csc^2(3x)-1}}\ dx = \int \cot^2(3x)\ \left(\csc^2(3x)-1\right)\ dx$$

$$= \int \left(\cot^2(3x)\csc^2(3x)\ -\ \cot^2(3x)\right)\ dx \underset{\uparrow}{=} \int \cot^2(3x)\ \csc^2(3x)\ dx - \int \cot^2(3x)\ dx.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\end{array}}$$

Para obtener $\int \cot^2(3x)\ \csc^2(3x)\ dx,$ se observa que la derivada de la función $f(x) = \cot(3x),$ salvo una constante, está presente en el integrando, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \cot(3x) \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\,3\csc^2(3x)\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{du}{3} = \csc^2(3x)\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^2(3x)\ \csc^2(3x)\ dx = \int \left(\overbrace{\cot(3x)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio}\\ u=\cot(3x)\end{array}}}\right)^2\ \overbrace{\csc^2(3x)\,dx}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Diferencial}\\ -\frac{du}{3}=\csc^2(3x)\ dx\end{array}}} = \int u^2\left(-\frac{du}{3}\right) = \int u^2 \overbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}}\ du$$

$$= -\frac{1}{3}\overbrace{\underbrace{\int u^2\ du}_{\boxed{\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=2}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} = -\frac{1}{3}\ \frac{u^3}{3} + C_1 = -\frac{\cot^3(3x)}{9} + C_2,$$

es decir,

$$\int \cot^2(3x)\ \csc^2(3x)\ dx = -\ \frac{\cot^3(3x)}{9} + C_2.$$

Para obtener la familia de primitiva de la función $f(x) = \cot^2(3x)$, se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonométrica

$$1 + \cot^2(\cdot) = \csc^2(\cdot), \qquad \text{se tiene que} \qquad \cot^2(\cdot) = \csc^2(\cdot) - 1,$$

y se escribe la integral como

$$\int \cot^2(3x)\ dx = \int \left(\csc^2(3x) - 1\right)\ dx \underset{\uparrow}{=} \int \csc^2(3x)\ dx - \int dx,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\end{array}}$$

Para la expresión $\int \csc^2(3x)\ dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 3x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 3\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{3} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \csc^2 \overbrace{(3x)}^{\boxed{\text{Cambio } u = 3x}} \overbrace{dx}^{\boxed{\text{Diferencial } \frac{du}{3} = dx}} = \int \csc^2 u\ \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \csc^2 u\ du = -\ \frac{1}{3}\cot u + C_3 = -\ \frac{1}{3}\cot(3x) + C_3,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}$$

es decir,

$$\int \csc^2(3x)\ dx = -\ \frac{1}{3}\cot(3x) + C_3.$$

Por otra parte,

$$\int dx = x + C_4,$$

con lo que,

$$\int \cot^2(3x)\ dx = \int \csc^2(3x)\ dx - \int dx = -\ \frac{1}{3}\cot(3x) - x + C_5.$$

así,

$$\int \cot^4(3x)\ dx = \int \cot^2(3x)\ \csc^2(3x)\ dx - \int \cot^2(3x)\ dx = -\ \frac{\cot^3(3x)}{9} - \left(-\ \frac{1}{3}\cot(3x) - x\right) + C_6$$

$$= -\ \frac{\cot^3(3x)}{9} + \frac{1}{3}\cot(3x) + x + C_6.$$

Entonces,

$$\int \cot^6(3x)\ dx = \int \cot^4(3x)\ \csc^2(3x)\ dx - \int \cot^4(3x)\ dx$$

$$= -\frac{\cot^5(3x)}{15} - \left(-\frac{\cot^3(3x)}{9} + \frac{1}{3}\cot(3x) + x\right) + C$$

$$= -\frac{\cot^5(3x)}{15} + \frac{\cot^3(3x)}{9} - \frac{\cot(3x)}{3} - x + C.$$

Luego,

$$\int \cot^6(3x)\ dx = -\frac{\cot^5(3x)}{15} + \frac{\cot^3(3x)}{9} - \frac{\cot(3x)}{3} - x + C.$$

★

Ejemplo 232 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sec^4 x\ \tan x}{\sqrt{4-\tan^2 x}}\ dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u^2 = 4 - \tan^2 x \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad 2u\ du = 2\tan x\ \sec^2 x\ dx \quad \Longrightarrow \quad u\ du = \tan x\ \sec^2 x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\sec^4 x\ \tan x}{\sqrt{4-\tan^2 x}}\ dx = \int \frac{\overbrace{\sec^2 x}^{\boxed{\sec^2 x = \tan^2 x + 1}}}{\sqrt{4-\tan^2 x}}\ \sec^2 x\ \tan x\ dx = \int \frac{\overbrace{\tan^2 x}^{\boxed{\substack{\text{Como } u^2 = 4-\tan^2 x,\\ \text{entonces } \tan^2 x = 4-u^2}}} + 1}{\sqrt{4-\tan^2 x}}\ \sec^2 x\ \tan x\ dx$$

$$= \int \frac{4-u^2+1}{\sqrt{u^2}}\ u\ du = \int \frac{5-u^2}{u}\ u\ du = \int \left(5-u^2\right)\ du = 5u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= 5\sqrt{4-\tan^2 x} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{4-\tan^2 x}\right)^3 + C = 5\sqrt{4-\tan^2 x} - \frac{1}{3}\left(4-\tan^2 x\right)\sqrt{4-\tan^2 x} + C$$

$$= \left(5 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\tan^2 x\right)\ \sqrt{4-\tan^2 x} + C = \left(\frac{11}{3} + \frac{1}{3}\tan^2 x\right)\ \sqrt{4-\tan^2 x} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\sec^4 x\ \tan x}{\sqrt{4-\tan^2 x}}\ dx = \left(\frac{11}{3} + \frac{1}{3}\tan^2 x\right)\ \sqrt{4-\tan^2 x} + C.$$

★

Ejemplo 233 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

Solución : Al aplicar la conjugada trigonométrica, se tiene

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{1}{(1-\cos x)}\ \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}\ dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\ dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\ dx,$$

donde,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \csc^2 x \; dx = - \; \cot x + C_1,$$

mientras que, para resolver la segunda integral, $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$, se propone el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos x \; dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\, du = -\frac{1}{u} + C_2,$$

como $u = \operatorname{sen} x$, se tiene que

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + C_2 = - \; \csc x + C_2.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = - \; \cot x \; - \; \csc x + C.$$

★

Ejemplo 234 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}$.

Solución : Es conocido que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

se escribe la integral como

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}\, dx + \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

Para la primera integral se propone el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = - \operatorname{sen} x \; dx \qquad \Longrightarrow \qquad - \; du = \operatorname{sen} x \; dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{-du}{u^2} = - \int u^{-2}\, du = \frac{1}{u} + C_1 = \frac{1}{\cos x} + C_1 = \sec x + C_1,$$

es decir,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \sec x + C_1,$$

mientras que,

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \csc x \; dx = \ln |\csc x - \cot x| + C_2.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x} = \sec x + \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

★

Ejemplo 235 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(nx)\ dx$ *con* $m \neq n$.

Solución : Es conocido que

$$\cos(m+n)\,x = \cos(mx)\ \cos(nx) - \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(mx)$$

y

$$\cos(m-n)\,x = \cos(mx)\ \cos(nx) + \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(mx),$$

entonces

$$(-1)\left\{\begin{array}{l} \cos(m+n)\,x = \cos(mx)\ \cos(nx) - \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(mx) \\ \cos(m-n)\,x = \cos(mx)\ \cos(nx) + \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(mx) \end{array}\right.$$

$$\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x = 2\operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(mx)$$

de aquí, se obtiene la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(mx) = \frac{\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x}{2}, \tag{2}$$

por lo que

$$\int \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(nx)\ dx = \int \frac{\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \cos(m-n)\,x\ dx - \int \cos(m+n)\,x\ dx\right) = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)\,x\ dx - \frac{1}{2}\int \cos(m+n)\,x\ dx$$

Para la integral $\displaystyle\int \cos(m-n)\,x\ dx$, se propone el cambio de variable

$$u = (m-n)\,x \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad du = (m-n)\ dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{m-n} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(m-n)\,x\ dx = \int \cos u\ \frac{du}{m-n} = \frac{1}{m-n}\int \cos u\ du = \frac{1}{m-n}\ \operatorname{sen} u + C_1 = \frac{\operatorname{sen}(m-n)\,x}{m-n} + C_1.$$

Para la integral $\displaystyle\int \cos(m+n)\,x\ dx$, se propone el cambio de variable

$$u = (m+n)\,x \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad du = (m+n)\ dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{m+n} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(m+n)\,x\ dx = \int \cos u\ \frac{du}{m+n} = \frac{1}{m+n}\int \cos u\ du = \frac{1}{m+n}\ \operatorname{sen} u + C_2 = \frac{\operatorname{sen}(m+n)\,x}{m+n} + C_2.$$

Finalmente,

$$\int \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)\,x\ dx - \frac{1}{2}\int \cos(m+n)\,x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(m-n)\,x}{m-n} + C_1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(m+n)\,x}{m+n} + C_2\right) = \frac{\operatorname{sen}(m-n)\,x}{2\,(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)\,x}{2\,(m+n)} + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(nx)\ dx = \frac{\operatorname{sen}(m-n)\,x}{2\,(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)\,x}{2\,(m+n)} + C.$$

★

Ejemplo 236 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx.$

Solución : En el ejemplo **??** se obtuvo la familia de primitivas de la integral por medio del método de integración por partes

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = -\frac{16}{63}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos(4x) + \frac{2}{63}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) + C.$$

Ahora resolvemos la integral usando la identidad trigonométrica dada en la ecuación (2)

$$\operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(mx) = \frac{\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x}{2},$$

con $m = \dfrac{1}{2}$ y $n = 4$, así,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{2}-4\right)x - \cos\left(\frac{1}{2}+4\right)x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{7x}{2}\right) - \cos\left(\frac{9x}{2}\right)\right),$$

como la función coseno es una función par, entonces

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7x}{2}\right) - \cos\left(\frac{9x}{2}\right)\right).$$

La integral se escribe

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx &= \int \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7x}{2}\right) - \cos\left(\frac{9x}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\left(\frac{7x}{2}\right) - \cos\left(\frac{9x}{2}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \cos\left(\frac{7x}{2}\right) dx - \int \cos\left(\frac{9x}{2}\right) dx\right) = \frac{1}{2}\int \cos\left(\frac{7x}{2}\right) dx - \frac{1}{2}\int \cos\left(\frac{9x}{2}\right) dx\end{aligned}$$

Para la integral $\displaystyle\int \cos\left(\frac{7x}{2}\right) dx$, se propone el cambio de variable

$$u = \frac{7x}{2} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{7}{2}\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2\ du}{7} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos\left(\frac{7x}{2}\right) dx = \int \cos u\ \frac{2\ du}{7} = \frac{2}{7}\int \cos u\ du = \frac{2}{7}\ \operatorname{sen} u + C_1 = \frac{2}{7}\ \operatorname{sen}\left(\frac{7x}{2}\right) + C_1.$$

Para la integral $\displaystyle\int \cos\left(\frac{9x}{2}\right) dx$, se propone el cambio de variable

$$u = \frac{9x}{2} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{9}{2}\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2\ du}{9} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos\left(\frac{9x}{2}\right) dx = \int \cos u \ \frac{2\ du}{9} = \frac{2}{9}\int \cos u \ du = \frac{2}{9}\ \operatorname{sen} u + C_2 = \frac{2}{9}\ \operatorname{sen}\left(\frac{9x}{2}\right) + C_2.$$

Finalmente,

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = \frac{1}{2}\int \cos\left(\frac{7x}{2}\right)\ dx - \frac{1}{2}\int \cos\left(\frac{9x}{2}\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\ \operatorname{sen}\left(\frac{7x}{2}\right) + C_1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\ \operatorname{sen}\left(\frac{9x}{2}\right) + C_2\right) = \frac{1}{7}\ \operatorname{sen}\left(\frac{7x}{2}\right) - \frac{1}{9}\ \operatorname{sen}\left(\frac{9x}{2}\right) + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx = \frac{1}{7}\ \operatorname{sen}\left(\frac{7x}{2}\right) - \frac{1}{9}\ \operatorname{sen}\left(\frac{9x}{2}\right) + C.$$

★

Ejemplo 237 *: Integre* $\displaystyle\int \cos^2(5x)\ \cos^3(2x)\ dx.$

Solución : Escribimos la integral como

$$\int \cos^2(5x)\ \cos^3(2x)\, dx = \int \cos^2(5x)\ \cos^2(2x)\ \cos(2x)\, dx = \int \left(\cos(5x)\cos(2x)\right)^2\ \cos(2x)\, dx$$

Es conocido que

$$\cos x\ \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2},$$

por lo tanto,

$$\cos(mx)\ \cos(nx) = \frac{\cos(mx+nx) + \cos(mx-nx)}{2} = \frac{\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)}{2},$$

así

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos(mx)\ \cos(nx) = \dfrac{\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)}{2}\\ \text{con}\ \ m=5\ \ \text{y}\ \ n=2\end{array}}$$

$$\left(\overbrace{\cos(5x)\cos(2x)}\right)^2\ \cos(2x) = \left(\frac{\cos(7x)+\cos(3x)}{2}\right)^2 \cos(2x) = \frac{\left(\cos(7x)+\cos(3x)\right)^2}{4}\ \cos(2x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos(mx)\ \cos(nx) = \dfrac{\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)}{2}\\ \text{con}\ \ m=7\ \ \text{y}\ \ n=3\end{array}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underbrace{\cos^2(7x)} + 2\overbrace{\cos(7x)\cos(3x)} + \underbrace{\cos^2(3x)}\right)\ \cos(2x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos^2(ax) = \dfrac{1+\cos(2ax)}{2}\\ \text{con}\ \ a=7\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos^2(ax) = \dfrac{1+\cos(2ax)}{2}\\ \text{con}\ \ a=3\end{array}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos(14x)}{2} + 2\,\frac{\cos(10x)+\cos(4x)}{2} + \frac{1+\cos(6x)}{2}\right)\cos(2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(14x)}{2} + \cos(10x) + \cos(4x) + \frac{1}{2} + \frac{\cos(6x)}{2}\right)\cos(2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\cos(14x)}{2} + \cos(10x) + \cos(4x) + \frac{\cos(6x)}{2}\right)\cos(2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\cos(14x)}{2} + \cos(10x) + \cos(4x) + \frac{\cos(6x)}{2}\right)\cos(2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\cos(14x)}{2} + \cos(10x) + \cos(4x) + \frac{\cos(6x)}{2}\right)\cos(2x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos(mx)\ \cos(nx) = \dfrac{\cos((m+n)\,x)+\cos((m-n)\,x)}{2}\\ \text{con}\quad m=14\quad \text{y}\quad n=2\end{array}}\qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos(mx)\ \cos(nx) = \dfrac{\cos((m+n)\,x)+\cos((m-n)\,x)}{2}\\ \text{con}\quad m=6\quad \text{y}\quad n=2\end{array}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(2x) + \frac{1}{2}\overbrace{\cos(14x)\cos(2x)} + \underbrace{\cos(10x)\cos(2x)} + \underbrace{\cos(4x)\cos(2x)} + \frac{1}{2}\overbrace{\cos(6x)\cos(2x)}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos(mx)\ \cos(nx) = \dfrac{\cos((m+n)\,x)+\cos((m-n)\,x)}{2}\\ \text{con}\quad m=10\quad \text{y}\quad n=2\end{array}}\qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \cos(mx)\ \cos(nx) = \dfrac{\cos((m+n)\,x)+\cos((m-n)\,x)}{2}\\ \text{con}\quad m=4\quad \text{y}\quad n=2\end{array}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(2x) + \frac{1}{2}\frac{\cos(16x)+\cos(12x)}{2} + \frac{\cos(12x)+\cos(8x)}{2} + \frac{\cos(6x)+\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos(8x)+\cos(4x)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{\cos(16x)+\cos(12x)}{16} + \frac{\cos(12x)+\cos(8x)}{8} + \frac{\cos(6x)+\cos(2x)}{8} + \frac{\cos(8x)+\cos(4x)}{16}$$

$$= \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{\cos(16x)}{16} + \frac{\cos(12x)}{16} + \frac{\cos(12x)}{8} + \frac{\cos(8x)}{8} + \frac{\cos(6x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{\cos(8x)}{16} + \frac{\cos(4x)}{16}$$

$$= \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{1}{16}\cos(16x) + \frac{3}{16}\cos(12x) + \frac{1}{8}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(8x) + \frac{1}{16}\cos(4x)\,,$$

es decir,

$$(\cos(5x)\cos(2x))^2\cos(2x) = \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{1}{16}\cos(16x) + \frac{3}{16}\cos(12x) + \frac{1}{8}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(8x) + \frac{1}{16}\cos(4x)\,.$$

Integrando

$$\int \cos^2(5x)\cos^3(2x)\,dx = \int\left(\frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{\cos(16x)}{16} + \frac{3}{16}\cos(12x) + \frac{\cos(6x)}{8} + \frac{3}{16}\cos(8x) + \frac{\cos(4x)}{16}\right)dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\cos(2x)\,dx + \int \frac{\cos(16x)}{16}dx + \int \frac{3}{16}\cos(12x)\,dx + \int \frac{\cos(6x)}{8}dx$$

$$+ \int \frac{3}{16}\cos(8x)\,dx + \int \frac{\cos(4x)}{16}dx$$

$$= \frac{3}{8}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{16}\int \cos(16x)\,dx + \frac{3}{16}\int \cos(12x)\,dx + \frac{1}{8}\int \cos(6x)\,dx$$

$$+ \frac{3}{16}\int \cos(8x)\,dx + \frac{1}{16}\int \cos(4x)\,dx$$

Resolvemos cada una de las integrales.

- Para la integral $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 2x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dx,$$

  con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

  Entonces, la integral queda

$$\int \cos(2x)\,dx = \int \cos u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} u + C_1 = \frac{1}{2}\ \operatorname{sen}(2x) + C_1.$$

- Para la integral $\displaystyle\int \cos(16x)\,dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 16x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 16\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{16} = dx,$$

  con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

  Entonces, la integral queda

$$\int \cos(16x)\,dx = \int \cos u\ \frac{du}{16} = \frac{1}{16}\int \cos u\ du = \frac{1}{16}\ \operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{16}\ \operatorname{sen}(16x) + C_2.$$

- Para la integral $\displaystyle\int \cos(12x)\,dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 12x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 12\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{12} = dx,$$

  con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

  Entonces, la integral queda

$$\int \cos(12x)\,dx = \int \cos u\ \frac{du}{12} = \frac{1}{12}\int \cos u\ du = \frac{1}{12}\ \operatorname{sen} u + C_3 = \frac{1}{12}\ \operatorname{sen}(12x) + C_3.$$

- Para la integral $\displaystyle\int \cos(6x)\,dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 6x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 6\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{6} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(6x)\,dx = \int \cos u\ \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int \cos u\ du = \frac{1}{6}\ \operatorname{sen} u + C_4 = \frac{1}{6}\ \operatorname{sen}(6x) + C_4.$$

- Para la integral $\displaystyle\int \cos(8x)\,dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 8x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 8\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{8} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(8x)\,dx = \int \cos u\ \frac{du}{8} = \frac{1}{8}\int \cos u\ du = \frac{1}{8}\ \operatorname{sen} u + C_5 = \frac{1}{8}\ \operatorname{sen}(8x) + C_5.$$

- Para la integral $\displaystyle\int \cos(4x)\,dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 4x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 4\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{4} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(4x)\,dx = \int \cos u\ \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \cos u\ du = \frac{1}{4}\ \operatorname{sen} u + C_6 = \frac{1}{4}\ \operatorname{sen}(4x) + C_6.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(5x)\cos^3(2x)\,dx &= \frac{3}{8}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{16}\int \cos(16x)\,dx + \frac{3}{16}\int \cos(12x)\,dx + \frac{1}{8}\int \cos(6x)\,dx \\
&\qquad + \frac{3}{16}\int \cos(8x)\,dx + \frac{1}{16}\int \cos(4x)\,dx \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\ \operatorname{sen}(2x) + C_1\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{16}\ \operatorname{sen}(16x) + C_2\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{12}\ \operatorname{sen}(12x) + C_3\right) \\
&\qquad + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}\ \operatorname{sen}(6x) + C_4\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{8}\ \operatorname{sen}(8x) + C_5\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\ \operatorname{sen}(4x) + C_6\right) \\
&= \frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{256}\operatorname{sen}(16x) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}(6x) + \frac{3}{128}\operatorname{sen}(8x) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) + C.
\end{aligned}$$

donde $C = \frac{3}{8}\,C_1 + \frac{1}{16}\,C_2 + \frac{3}{16}\,C_3 + \frac{1}{8}\,C_4 + \frac{3}{16}\,C_5 + \frac{1}{16}\,C_6$.

Luego,

$$\int \cos^2(5x)\cos^3(2x)\,dx = \frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{256}\operatorname{sen}(16x) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}(6x) + \frac{3}{128}\operatorname{sen}(8x)$$
$$+\frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) + C.$$

★

Ejemplo 238 *: Integre* $\int \sec^3 x\ dx$.

Solución : Escribimos la integral como

$$\int \sec^3 x\ dx = \int \sec^2 x \sec x\ dx.$$

Integramos por partes, con

$$u = \sec x \xrightarrow{\text{Al derivar}} du = \sec x\ \tan x\ dx$$
$$dv = \sec^2 x\ dx \xrightarrow{\text{Al integrar}} v = \tan x.$$

La integral se transforma en

$$\int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \tan x\ \sec x\ \tan x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \sec x\ \tan^2 x\ dx,$$

por la identidad trigonométrica

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \text{se tiene que} \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1,$$

así,

$$\int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \sec x\ \tan^2 x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)\ dx$$
$$= \sec x\ \tan x - \int \sec^3 x\ dx + \int \sec x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \sec^3 x\ dx + \ln|\sec x + \tan x| + C_1,$$

es decir,

$$\int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \sec^3 x\ dx + \ln|\sec x + \tan x| + C_1,$$

despejamos $\int \sec^3 x\ dx$

$$\int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \sec^3 x\ dx + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$$
$$\Longrightarrow \quad \int \sec^3 x\ dx + \int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$$
$$\Longrightarrow \quad 2\int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$$
$$\Longrightarrow \quad \int \sec^3 x\ dx = \frac{1}{2}\sec x\ \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Luego,

$$\int \sec^3 x\ dx = \frac{1}{2}\sec x\ \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

★

Ejemplo 239 *: Calcular* $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\ \tan\left(x^3\right)\ \sec^2\left(x^3\right)\ dx.$

Solución : En virtud que el intervalo de integración es un intervalo simétrico, es conveniente estudiar la simetría del integrando, es decir, conocer si la función

$$f(x) = x^2\ \tan\left(x^3\right)\ \sec^2\left(x^3\right)$$

es una función par o impar.

$$f(-x) = \overbrace{(-x)^2}^{\substack{\text{Función par}\\ (-x)^2 = x^2}} \tan\left(\overbrace{(-x)^3}^{\substack{\text{Función impar}\\ (-x)^3 = -x^3}}\right) \sec^2\left(\overbrace{(-x)^3}^{\substack{\text{Función impar}\\ (-x)^3 = -x^3}}\right) = x^2 \overbrace{\tan\left(-x^3\right)}^{\substack{\text{Función impar}\\ \tan(-x) = -\tan x}} \left(\overbrace{\sec\left(-x^3\right)}^{\substack{\text{Función par}\\ \sec(-x) = \sec x}}\right)^2 = -\ x^2 \tan\left(x^3\right)\sec^2\left(x^3\right) = -\ f(x),$$

por lo tanto, el integrando es una función impar, por lo que podemos concluir que

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\ \tan\left(x^3\right)\ \sec^2\left(x^3\right)\ dx = 0.$$

★

Ejemplo 240 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3 x\ \sqrt{\cosh x}\ dx.$

Solución : Se escribe la integral como

$$\int \overbrace{\operatorname{senh}^3}^{\substack{\text{Potencia impar.}\\ \text{Tomar un término seno}\\ \text{hiperbólico.}}} x\ \sqrt{\cosh x}\ dx = \int \operatorname{senh}^2 x\ \sqrt{\cosh x}\ \underbrace{\underline{\operatorname{senh} x\ dx}}_{\text{Futuro diferencial.}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\operatorname{senh} x\ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\cosh x$, así, cabe la pregunta

$$\int \operatorname{senh}^3 x\ \sqrt{\cosh x}\ dx = \int \underbrace{\operatorname{senh}^2 x}_{\text{¿Qué hacer con este término?}}\ \sqrt{\cosh x}\ \underline{\operatorname{senh} x\ dx},$$

por la identidad hiperbólica básica

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x - 1,$$

por lo que,

$$\int \operatorname{senh}^3 x\ \sqrt{\cosh x}\ dx = \int \underbrace{\operatorname{senh}^2 x}_{\operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x - 1}\ \sqrt{\cosh x}\ \underline{\operatorname{senh} x\ dx} = \int \left(\cosh^2 x - 1\right)\sqrt{\cosh x}\ \underline{\operatorname{senh} x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función coseno hiperbólico y su correspondiente derivada, la función seno hiperbólico, así, se propone el cambio de variable

$$u = \cosh x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\operatorname{senh} x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \left(\cosh^2 x - 1\right) \sqrt{\cosh x}\ \underline{\operatorname{senh} x\ dx} = \int \left(\left(\overbrace{\cosh x}^{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cosh x}} \right)^2 - 1 \right) \left(\overbrace{\cosh x}^{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cosh x}} \right)^{1/2} \overbrace{\underline{\operatorname{senh} x\ dx}}^{\substack{\text{Diferencial} \\ du = \underline{\operatorname{senh} x\ dx}}} = \int \left(u^2 - 1\right) u^{1/2} du$$

$$= \int \left(u^{5/2} - u^{1/2}\right)\ du \underset{\uparrow}{=} \overbrace{\underbrace{\int u^{5/2}\ du}} - \overbrace{\underbrace{\int u^{1/2}\ du}} = \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2u^{7/2}}{7} - \frac{2u^{3/2}}{3} + C$$

Integrales de una potencia. Integrales de tabla.

Linealidad de la integral $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ con $n = \frac{5}{2}$ y $n = \frac{3}{2}$

$$= \frac{2\cosh^{7/2} x}{7} - \frac{2\cosh^{3/2} x}{3} + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{senh}^3 x\ \sqrt{\cosh x}\ dx = \frac{2\cosh^{7/2} x}{7} - \frac{2\cosh^{3/2} x}{3} + C.$$

★

Ejemplo 241 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{senh}^4 x\ \cosh^3 x\ dx.$

Solución : Se escribe la integral como

Potencia impar. Tomar un término coseno hiperbólico.

$$\int \operatorname{senh}^4 x\ \cosh^3 x\ dx = \int \operatorname{senh}^4 x\ \cosh^2 x\ \underset{\uparrow}{\underline{\cosh x\ dx}},$$

Futuro diferencial.

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\cosh x\ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\operatorname{senh} x$, así, cabe la pregunta

$$\int \operatorname{senh}^4 x\ \cosh^3 x\ dx = \int \operatorname{senh}^4 x\ \underbrace{\cosh^2 x}_{\uparrow}\ \underline{\cosh x\ dx},$$

¿Qué hacer con este término?

por la identidad hiperbólica básica

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x,$$

por lo que,

$$\int \operatorname{senh}^4 x \ \cosh^3 x \ dx = \int \operatorname{senh}^4 x \ \underbrace{\cosh^2 x}_{\boxed{\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x}} \ \underline{\cosh x \ dx} = \int \operatorname{senh}^4 x \ \left(1 + \operatorname{senh}^2 x\right) \ \underline{\operatorname{senh} x \ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función seno hiperbólico y su correspondiente derivada, la función coseno hiperbólico, así, se propone el cambio de variable

$$u = \operatorname{senh} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\cosh x \ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{senh}^4 x \ \left(1 + \operatorname{senh}^2 x\right) \ \underline{\cosh x \ dx} = \int \left(\overbrace{\operatorname{senh} x}^{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \operatorname{senh} x}}}\right)^4 \left(1 + \left(\overbrace{\operatorname{senh} x}^{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \operatorname{senh} x}}}\right)^2\right) \overbrace{\underline{\cosh x \ dx}}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ du = \underline{\cosh x \ dx}}}} = \int u^4 \left(1 + u^2\right) du$$

$$= \int \left(u^4 + u^6\right) \ du \underset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}}{=} \overbrace{\underbrace{\int u^4 \ du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 4 \ \text{ y } \ n = 6}}}^{\boxed{\substack{\text{Integrales de una potencia.} \\ \text{Integrales de tabla.}}}} + \overbrace{\underbrace{\int u^6 \ du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 4 \ \text{ y } \ n = 6}}}^{\boxed{\substack{\text{Integrales de una potencia.} \\ \text{Integrales de tabla.}}}} = \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\operatorname{senh}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{senh}^7 x}{7} + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{senh}^4 x \ \cosh^3 x \ dx = \frac{\operatorname{senh}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{senh}^7 x}{7} + C.$$

★

Ejemplo 242 *: Integre* $\displaystyle\int \tanh^{-2/3} x \ \operatorname{sech}^6 x \ dx.$

Solución : Se escribe la integral como

$$\int \tanh^{-2/3} x \ \overset{\boxed{\substack{\text{Potencia par.} \\ \text{Tomar un término } \operatorname{sech}^2 x.}}}{\operatorname{sech}^6} x \ dx = \int \tanh^{-2/3} x \ \operatorname{sech}^4 x \ \underset{\boxed{\text{Futuro diferencial.}}}{\underline{\operatorname{sech}^2 x \ dx}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\tanh x$, así, cabe la pregunta

$$\int \tanh^{-2/3} x\ \operatorname{sech}^6 x\ dx = \int \tanh^{-2/3} x\ \underbrace{\operatorname{sech}^4 x}_{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}\ \underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx},$$

por la identidad hiperbólica básica

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$$

se tiene,

$$\int \tanh^{-2/3} x\ \operatorname{sech}^6 x\ dx = \int \tanh^{-2/3} x\ \operatorname{sech}^4 x\ \underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx} = \int \tanh^{-2/3} x\ \Big(\underbrace{\operatorname{sech}^2 x}_{\boxed{1-\tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x}}\Big)^2\ \underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx}$$

$$= \int \tanh^{-2/3} x\ \left(1 - \tanh^2 x\right)^2\ \underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función tangente hiperbólica y su correspondiente derivada, la función secante hiperbólica al cuadrado, así, se propone el cambio de variable

$$u = \tanh x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tanh^{-2/3} x\ \left(1 - \tanh^2 x\right)\ \underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx} = \int \Big(\overbrace{\tanh x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \tanh x}}\Big)^{-2/3} \left(1 - \Big(\overbrace{\tanh x}^{\boxed{\text{Cambio } u = \tanh x}}\Big)^2\right) \overbrace{\underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx}}^{\boxed{\text{Diferencial } du = \underline{\operatorname{sech}^2 x\ dx}}}$$

$$= \int u^{-2/3}\left(1 - u^2\right) du = \int \left(u^{-2/3} - u^{4/3}\right)\ du \overset{\boxed{\text{Linealidad de la integral } \int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}}{=} \overbrace{\underbrace{\int u^{-2/3}\ du}} - \overbrace{\underbrace{\int u^{4/3}\ du}}^{\boxed{\text{Integrales de una potencia. Integrales de tabla.}}}$$

$$\boxed{\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = -\frac{2}{3} \ \text{ y } \ n = \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{u^{1/3}}{\frac{1}{3}} - \frac{u^{7/3}}{\frac{7}{3}} + C = 3u^{1/3} - \frac{3u^{7/3}}{7} + C = 3\tanh^{1/3} x - \frac{3\tanh^{7/3} x}{7} + C.$$

Luego,

$$\int \tanh^{-2/3} x\ \operatorname{sech}^6 x\ dx = 3\tanh^{1/3} x - \frac{3\tanh^{7/3} x}{7} + C.$$

★

Ejemplo 243 *: Integre* $\displaystyle\int \coth^5 t\ \operatorname{csch}^4 t\ dt.$

Solución : Se escribe la integral como

$$\int \coth^5 t\ \overset{\substack{\text{Potencia par.}\\ \text{Tomar un término } \operatorname{csch}^2 t.}}{\operatorname{csch}^4} t\ dt = \int \coth^5 t\ \operatorname{csch}^2 t\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Futuro diferencial.}}}{\underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\coth t$, así, cabe la pregunta

$$\int \coth^5 t\ \operatorname{csch}^4 t\ dt = \int \coth^5 t\ \underbrace{\operatorname{csch}^2 t}_{\substack{\uparrow\\ \text{¿Qué hacer con este término?}}}\ \underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt},$$

por la identidad hiperbólica básica

$$\coth^2 t - 1 = \operatorname{csch}^2 t,$$

se tiene,

$$\int \coth^5 t\ \operatorname{csch}^4 t\ dt = \int \coth^5 t\ \underbrace{\operatorname{csch}^2 t}_{\substack{\uparrow\\ \coth^2 t - 1 = \operatorname{csch}^2 t}}\ \underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt} = \int \coth^5 t\ \left(\coth^2 t - 1\right)\ \underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt}.$$

Se observa que, en el nuevo integrando aparece la función cotangente hiperbólica y su correspondiente derivada, la función cosecante hiperbólica al cuadrado, así, se propone el cambio de variable

$$u = \coth t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \coth^5 t\ \left(\coth^2 t - 1\right)\ \underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt} = \int \left(\overbrace{\coth t}^{\substack{\text{Cambio}\\ u = \coth t}}\right)^5 \left(\left(\overbrace{\coth t}^{\substack{\text{Cambio}\\ u = \coth t}}\right)^2 - 1\right) \overbrace{\underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ du = \underline{\operatorname{csch}^2 t\ dt}}} = \int u^5 \left(u^2 - 1\right) du$$

$$= \int \left(u^7 - u^5\right)\ du \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}{=} \overbrace{\underbrace{\int u^7\ du}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 2 \ \text{ y } \ n = 4}} - \overbrace{\underbrace{\int u^5\ du}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 2 \ \text{ y } \ n = 4}}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}}} = \frac{u^8}{8} - \frac{u^6}{6} + C = \frac{\coth^8 t}{8} - \frac{\coth^6 t}{6} + C.$$

Luego,

$$\int \coth^5 t \ \operatorname{csch}^4 t \ dt = \frac{\coth^8 t}{8} - \frac{\coth^6 t}{6} + C.$$

★

Ejemplo 244 *: Integre* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{senh}(2x) \ \operatorname{senh}(3x)}{\cosh x} \ dx.$

Solución : Buscamos la familia de primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(2x) \ \operatorname{senh}(3x)}{\cosh x}$, es conocida la identidad hiperbólica

$$\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \ \cosh x,$$

así,

$$\int \frac{\operatorname{senh}(2x) \ \operatorname{senh}(3x)}{\cosh x} \ dx = \int \frac{2 \operatorname{senh} x \ \cosh x \ \operatorname{senh}(3x)}{\cosh x} \ dx = 2 \int \operatorname{senh} x \ \operatorname{senh}(3x) \ dx$$

por otra parte, es conocido que

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha) \ \cosh(\beta) + \operatorname{senh}(\alpha) \ \operatorname{senh}(\beta)$$

y

$$\cosh(\alpha - \beta) = \cosh(\alpha) \ \cosh(\beta) - \operatorname{senh}(\alpha) \ \operatorname{senh}(\beta),$$

entonces

$$(-1)\begin{cases} \cosh(\alpha - \beta) = \cosh(\alpha) \ \cosh(\beta) - \operatorname{senh}(\alpha) \ \operatorname{senh}(\beta) \\ \cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha) \ \cosh(\beta) + \operatorname{senh}(\alpha) \ \operatorname{senh}(\beta) \end{cases}$$

$$\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{senh}(\alpha) \ \operatorname{senh}(\beta)$$

de aquí, se obtiene la identidad hiperbólica

$$\operatorname{senh}(\alpha) \ \operatorname{senh}(\beta) = \frac{\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta)}{2}, \tag{3}$$

de aquí,

$$\operatorname{senh}(mx) \ \operatorname{senh}(mx) = \frac{\cosh((m+n)x) - \cosh((m-n)x)}{2},$$

así,

$$\int \overbrace{\operatorname{senh} x \ \operatorname{senh}(3x)}^{\substack{\text{Identidad hiperbólica} \\ \operatorname{senh}(mx) \ \operatorname{senh}(mx) = \frac{\cosh((m+n)x) - \cosh((m-n)x)}{2} \\ \text{con } \ m = 1 \ \text{ y } \ n = 3}} dx = \int \frac{\cosh(4x) - \cosh(-2x)}{2} \ dx = \frac{1}{2} \int \left(\cosh(4x) - \overbrace{\cosh(2x)}^{\substack{\text{Función par} \\ \cosh(-2x) = \cosh(2x)}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \cosh(4x) \, dx - \int \cosh(2x) \, dx \right) = \frac{1}{2} \int \cosh(4x) \, dx - \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$$

Resolvemos cada una de las integrales

- Para la integral $\displaystyle\int \cosh(4x) \, dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 4x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 4 \ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{4} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cosh(4x)\,dx = \int \cosh u\ \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \cosh u\ du = \frac{1}{4}\ \operatorname{senh} u + C_1 = \frac{1}{4}\ \operatorname{senh}(4x) + C_1.$$

- Para la integral $\displaystyle\int \cosh(2x)\,dx$, se propone el cambio de variable

$$u = 2x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cosh(2x)\,dx = \int \cosh u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cosh u\ du = \frac{1}{2}\ \operatorname{senh} u + C_2 = \frac{1}{2}\ \operatorname{senh}(2x) + C_2.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\operatorname{senh}(2x)\ \operatorname{senh}(3x)}{\cosh x}\ dx = 2\int \operatorname{senh} x\ \operatorname{senh}(3x)\ dx = 2\left(\frac{1}{2}\int \cosh(4x)\,dx - \frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx\right)$$

$$= \int \cosh(4x)\,dx - \int \cosh(2x)\,dx = \left(\frac{1}{4}\ \operatorname{senh}(4x) + C_1\right) - \left(\frac{1}{2}\ \operatorname{senh}(2x) + C_2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ \operatorname{senh}(4x) - \frac{1}{2}\ \operatorname{senh}(2x) + C.$$

donde $C = C_1 - C_2$.

Luego,

$$\int \frac{\operatorname{senh}(2x)\ \operatorname{senh}(3x)}{\cosh x}\ dx = \frac{1}{4}\ \operatorname{senh}(4x) - \frac{1}{2}\ \operatorname{senh}(2x) + C.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos la integral definida dada

$$\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{senh}(2x)\operatorname{senh}(3x)}{\cosh x}\ dx = \left(\frac{\operatorname{senh}(4x)}{4} - \frac{\operatorname{senh}(2x)}{2}\right|_0^{\ln 2}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{senh}(4(\ln 2))}{4} - \frac{\operatorname{senh}(2(\ln 2))}{2}\right) - \left(\frac{\operatorname{senh}(4(0))}{4} - \frac{\operatorname{senh}(2(0))}{2}\right),$$

donde,

$$\frac{\operatorname{senh}(4(\ln 2))}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{4\ln 2} - e^{-4\ln 2}}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(e^{\ln 2^4} - \frac{1}{e^{\ln 2^4}}\right) = \frac{1}{8}\left(2^4 - \frac{1}{2^4}\right) = \frac{255}{128}$$

$$\frac{\operatorname{senh}(2(\ln 2))}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\ln 2} - e^{-2\ln 2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\ln 2^2} - \frac{1}{e^{\ln 2^2}}\right) = \frac{1}{4}\left(2^2 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{15}{16}$$

$$\frac{\operatorname{senh}(4(0))}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{4(0)} - e^{-4(0)}}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(e^0 - \frac{1}{e^0}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0$$

$$\frac{\operatorname{senh}(2(0))}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2(0)} - e^{-2(0)}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^0 - \frac{1}{e^0}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0,$$

entonces

$$\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{senh}(2x)\operatorname{senh}(3x)}{\cosh x}\, dx = \frac{255}{128} - \frac{15}{16} = \frac{135}{128}.$$

★

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales trigonométricas

1. $\int \operatorname{sen} x\ \cos x\ dx$ 2. $\int \operatorname{sen}^2 x\ \cos x\ dx$ 3. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\ \cos x\ dx$ 4. $\int \operatorname{sen}^4 x\ \cos x\ dx$

5. $\int \cos^2 x\ \operatorname{sen} x\ dx$ 6. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}\, dx$ 7. $\int \cos^7 x\ \operatorname{sen} x\ dx$ 8. $\int \sqrt{\cos x}\ \operatorname{sen} x\ dx$

9. $\int \sqrt[3]{\cos x}\ \operatorname{sen} x\ dx$ 10. $\int \operatorname{sen}^2 x\ \cos^3 x\ dx$ 11. $\int \operatorname{sen}^3 x\ \cos^2 x\ dx$ 12. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$

13. $\int \operatorname{sen}^6(2x)\ \cos^5(2x)\ dx$ 14. $\int \cos^3 x\ dx$ 15. $\int \operatorname{sen}^4 x\ \cos^3 x\ dx$ 16. $\int \operatorname{sen}^3 t\ dt$

17. $\int \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$ 18. $\int \operatorname{sen}^3 x\ \sqrt{\cos x}\ dx$ 19. $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$ 20. $\int \cos^2 x\ dx$

21. $\int \operatorname{sen}^2 x\ \cos^2 x\ dx$ 22. $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\ \cos^5 x\ dx$ 23. $\int \operatorname{sen}^4 x\ \cos^2 x\ dx$ 24. $\int \cos^4 x\ dx$

25. $\int \cos^2(3x)\ \operatorname{sen}^4(3x)\ dx$ 26. $\int \tan x\ dx$ 27. $\int \cot x\ dx$ 28. $\int \operatorname{sen}^5 x\ \cos^7 x\ dx$

29. $\int \tan^6 x\ \sec^2 x\ dx$ 30. $\int \sqrt[5]{\tan^2 x}\ \sec^2 x\ dx$ 31. $\int \tan^4 t\ \sec^2 t\ dt$ 32. $\int \tan^2 x\ dx$

33. $\int \cot^2 x\ dx$ 34. $\int \tan^4 t\ dt$ 35. $\int \sec^4 t\ dt$ 36. $\int \csc^4 t\ dt$ 37. $\int \cot^4 x\ dx$

38. $\int \tan^3 x \sec^6 x\ dx$ 39. $\int \tan^5 x \sec x\ dx$ 40. $\int \cot^3 x \csc^4 x\ dx$ 41. $\int \tan^3(3x)\ dx$

42. $\int \tan^{1/2} x\ \sec^4 x\ dx$ 43. $\int \operatorname{sen}^5 x\ dx$ 44. $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$ 45. $\int \cos^3\theta\ \operatorname{sen}^{-2}\theta\ d\theta$

46. $\int \tan^4(ax)\ \sec^6(ax)\ dx$ 47. $\int \operatorname{sen}^4 x\ dx$ 48. $\int \tan^5 x\ dx$ 49. $\int \operatorname{sen}^5 x\ \sqrt[3]{\cos x}\ dx$

50. $\int \operatorname{sen}^2\theta\ \cos^4\theta\ d\theta$ 51. $\int \operatorname{sen}^4\theta\ \cos^4\theta\ d\theta$ 52. $\int \frac{\sec^2 x}{\cot x}\, dx$ 53. $\int \tan^5 x\ \sec^2 x\ dx$

54. $\int \cot^{1/2} t\ \sec^2 t\ dt$ 55. $\int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta$ 56. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\, dx$ 57. $\int \cos^2 x\ \tan^3 x\ dx$

58. $\int (\tan x + \cot x)^2\ dx$ 59. $\int \cos^7 t\ dt$ 60. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$ 61. $\int \operatorname{sen}^5(2t)\ \cos^4(2t)\ dt$

62. $\int \operatorname{sen}(3y)\ \cos y\ dy$ 63. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}$ 64. $\int \cot^4\theta\ \csc^4\theta\ d\theta$ 65. $\int \cos x\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

66. $\int \sec^6(b-ax)\ dx$ 67. $\int \operatorname{sen}^4(5x)\ dx$ 68. $\int \frac{\cos(2t)\ dt}{\cos t - \operatorname{sen} t}$ 69. $\int \operatorname{sen}^{1/2} t\ \cos^3 t\ dt$

70. $\int \operatorname{sen}^7(3x)\ \cos^2(3x)\ dx$ 71. $\int \cos^6 t\ dt$ 72. $\int (1-\operatorname{sen}(2x))^2\, dx$ 73. $\int \cot^6(3x)\, dx$

74. $\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t\ \cos t}$ 75. $\int \cot^4 x\ \csc^2 x\ dx$ 76. $\int \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\ \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\ d\omega$ 77. $\int \frac{\csc^3 x}{\tan x}\ dx$

78. $\int \frac{dt}{\cos^6 t}$ 79. $\int \cot^7 x\ \csc^2 x\ dx$ 80. $\int \cot^7 x\ dx$ 81. $\int \cos x\ \cos(2x)\ \cos(3x)\ dx$

82. $\int \operatorname{sen}^9 x\ \cos^3 x\ dx$ 83. $\int \frac{\sec^6 x}{\tan^6 x}\ dx$ 84. $\int \cos^4(2t)\ dt$ 85. $\int \tan^3 x\ \sec^{1/2} x\ dx$

86. $\int \tan^2(5t)\ dt$ 87. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\ \cos^2 x}$ 88. $\int \tan^5 x\ \sec^3 x\ dx$ 89. $\int \operatorname{sen}(3t)\ \operatorname{sen} t\ dt$

90. $\int \frac{dt}{1-\cos(2t)}$ 91. $\int \cos^6(3x)\ dx$ 92. $\int \tan^{-3}\theta\ \sec^2\theta\ d\theta$ 93. $\int \frac{\cos^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$

94. $\int \operatorname{sen}(\omega t)\ \operatorname{sen}(\omega t+\phi)\ dt$ 95. $\int \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\ \cos x\ dx$ 96. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos\left(\frac{5x}{2}\right)\ dx$

97. $\int x \operatorname{sen}^3\left(x^2\right)\ dx$ 98. $\int \cot^6(4w)\ dw$ 99. $\int \frac{1+\tan^2 x}{\sec^2 x}\ dx$ 100. $\int \cot x\ \csc^3 x\ dx$

101. $\int t \operatorname{sen}^2\left(t^2\right)\ dt$ 102. $\int \tan^6(2x)\ dx$ 103. $\int \frac{\operatorname{sen}^5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$ 104. $\int \tan^2 x\ \sec^4 x\ dx$

105. $\int \cot^4(2t)\ dt$ 106. $\int \frac{\operatorname{sen}^4(\sqrt{x})\ \cos^4(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$ 107. $\int \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen}(2x)\ \operatorname{sen}(3x)\ dx$

108. $\int \cos^5 x\ \operatorname{sen}^5 x\ dx$ 109. $\int \operatorname{sen}(5x)\ \operatorname{sen}(2x)\ dx$ 110. $\int \cos(at+b)\ \cos(at-b)\ dt$

111. $\int \tan t\ \sec^3 t\ dt$ 112. $\int \operatorname{sen}^6 t\ \cos^2 t\ dt$ 113. $\int \tan^4(4x)\ dx$ 114. $\int \sec^4(7x)\ dx$

115. $\int \cot^6 x\ \csc^6 x\ dx$ 116. $\int \cot^3\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$ 117. $\int \tan t\ \sec^6 t\ dt$ 118. $\int \frac{dt}{\operatorname{sen}^4 t\ \cos^2 t}$

119. $\int \tan^5 t\ \sec^{-3/2} t\ dt$ 120. $\int \cos(3x)\ \cos(4x)\ dx$ 121. $\int \cot^5 x\ \operatorname{sen}^3 x\ dx$

122. $\int \tan^{-3/2} t\ \sec^6 t\ dt$ 123. $\int \operatorname{sen}(4y)\ \cos(5y)\ dy$ 124. $\int \cos y\ \cos(4y)\ dy$

125. $\int \cot^3 x\ \csc^8 x\ dx$ 126. $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$ 127. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\ \cos\left(\frac{2x}{3}\right)\ dx$

128. $\int \frac{\cos^4(\ln x)\ \operatorname{sen}^3(\ln x)}{x}\ dx$ 129. $\int \tan^3 x\ \sec^3 x\ dx$ 130. $\int \cot^3 t\ \csc^4 t\ dt$

131. $\int \tan^3(3y)\ \sec^3(3y)\ dy$ 132. $\int \operatorname{sen}^4 x\ \cos^3 x\ dx$ 133. $\int \cot^5 x\ \csc^{1/5} x\ dx$

134. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(nx)\ dx \quad m \neq n$

135. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(mx)\ \cos(nx)\ dx \quad m \neq n$

136. $\displaystyle\int \cos(mx)\ \cos(nx)\ dx \quad m \neq n$

137. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^4 x\ \cosh^3 x\ dx$

138. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}$

139. $\displaystyle\int \tanh^5 t\ \operatorname{sech}^{-3/2} t\ dt$

140. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\ \tanh^3 x\ dx$

141. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3 x\ \sqrt{\cosh x}\ dx$

142. $\displaystyle\int \coth^3 t\ \operatorname{csch}^4 t\ dt$

143. $\displaystyle\int \tanh^5 x\ \operatorname{sech}^3 x\ dx$

144. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^5 x\ \sqrt[3]{\cosh x}\ dx$

145. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3\left(\frac{x}{a}\right)\ \cosh^5\left(\frac{x}{a}\right)\ dx$

146. $\displaystyle\int \cot^9 x\ \csc^6 x\ dx$

147. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3(e^x)\ \sqrt[3]{\cos(e^x)}}{5e^{-x}}\ dx$

148. $\displaystyle\int \frac{\sec^4(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

149. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\ \cos^4 x\ dx$

150. $\displaystyle\int \cot^7 x\ \csc^{-1/6} x\ dx$

151. $\displaystyle\int 3^x \tan^5(3^x)\ dx$

152. $\displaystyle\int \frac{x\cot^4\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)}{\cos^2(\operatorname{arcsen} x)}\ dx$

153. $\displaystyle\int \cot^5 x\ \csc^5 x\ dx$

154. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(2x)\ \cos^3(3x)\ dx$

155. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(2x)\ \operatorname{sen}^3(3x)\ dx$

156. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(3x)\ \cos^3(4x)\ dx$

157. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\tan^2(\log_2 x)}\ \sec^6(\log_2 x)}{x}\ dx$

158. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{\cot^3(\log x)}\ \csc^4(\log x)}{x}\ dx$

159. $\displaystyle\int \sec^3 x\ dx$

160. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \operatorname{sen}(4x)\ dx$

161. $\displaystyle\int \coth^5 t\ \operatorname{csch}^4 t\ dt$

162. $\displaystyle\int \frac{\sec^3(\arctan x)}{1+x^2}\ dx$

163. $\displaystyle\int \frac{5^x\ \sec^2(5^x)\,dx}{\operatorname{sen}^4(\tan(5^x))\ \cos^5(\tan(5^x))}$

164. $\displaystyle\int \tan t\ \operatorname{sen}^2(\ln(\cos t))\ \cos^6(\ln(\cos t))\ dt$

165. $\displaystyle\int \frac{\sec^4 x\ \tan x}{\sqrt{4-\tan^2 x}}\ dx$

166. $\displaystyle\int \sec^5 x\ dx$

167. $\displaystyle\int \csc^3 x\ dx$

168. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\tanh^2 t}\ \operatorname{sech}^4 t\ dt$

169. $\displaystyle\int \frac{\cosh^3 x}{\operatorname{senh}^2 x}\ dx$

170. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\ \sec^7(\cosh x)\,dx$

171. $\displaystyle\int \cos^3\left(\frac{2x}{3}\right)\ \cos^2(2x)\ dx$

172. $\displaystyle\int \tanh^{-2/3} x\ \operatorname{sech}^6 x\ dx$

173. $\displaystyle\int \cos^2(5x)\ \cos^4(3x)\ dx$

174. $\displaystyle\int \cos^2(5x)\ \cos^3(2x)\ dx$

175. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^3 x \sec^4 x\ dx$

176. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(2x)\ \operatorname{sen}(3x)}{\cos x}\ dx$

177. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{senh}(2x)\ \operatorname{senh}(3x)}{\cosh x}\ dx$

178. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\ \tan\left(x^3\right)\ \sec^2\left(x^3\right)\ dx$

179. $\displaystyle\int \csc^5 x\ dx$

180. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x}\ \cos x\ dx$

181. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(mx)\ \operatorname{senh}(nx)\ dx \quad m \neq n$

182. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(mx)\ \cosh(nx)\ dx \quad m \neq n$

183. $\displaystyle\int \cosh(mx)\ \cosh(nx)\ dx \quad m \neq n$

184. $\displaystyle\int \cosh(3x)\ \cosh(5x)\ \cosh(x)\ dx$

185. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(2x)\ \cosh(7x)\ \operatorname{senh}(3x)\ dx$

Respuestas: Ejercicios

1. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$; 2. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$; 3. $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x + C$; 4. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$; 5. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$; 6. $3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x} + C$;

7. $-\frac{1}{8}\cos^8 x + C$; 8. $-\frac{2}{3}\cos^{3/2} x + C$; 9. $-\frac{3}{4}\cos^{4/3} x + C$; 10. $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$; 11. $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$;

12. $2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^{5/2} x + C$; 13. $\frac{1}{14}\operatorname{sen}^7(2x) - \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9(2x) + \frac{1}{22}\operatorname{sen}^{11}(2x) + C$; 14. $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$;

15. $\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$; 16. $\frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t + C$; 17. $\frac{4}{7}\cos^7\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{5}\cos^5\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{9}\cos^9\left(\frac{x}{2}\right) + C$;

18. $\frac{2}{7}\cos^{7/2} x - \frac{2}{3}\cos^{3/2} x + C$; 19. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$; 20. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$; 21. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$;

22. $\frac{3}{5}\operatorname{sen}^{5/3} x + \frac{6}{11}\operatorname{sen}^{11/3} x + \frac{3}{17}\operatorname{sen}^{17/3} x + C$; 23. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{192}\operatorname{sen}(6x) + C$;

24. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$; 25. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\operatorname{sen}(6x) - \frac{1}{192}\operatorname{sen}(12x) + \frac{1}{576}\operatorname{sen}(18x) + C$; 26. $\ln|\sec x| + C$;

27. $\ln|\cos x| + C$; 28. $-\frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^{12} x}{12} + C$; 29. $\frac{\tan^7 x}{7} + C$; 30. $\frac{5}{7}\tan^{7/5} x + C$; 31. $\frac{1}{5}\tan^5 t + C$;

32. $\tan x - x + C$; 33. $-\cot x - x + C$; 34. $t - \tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t + C$; 35. $\tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t + C$;

36. $-\cot t - \frac{1}{3}\cot^3 t + C$; 37. $-\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$; 38. $\frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{3}\tan^6 x + \frac{1}{8}\tan^8 x + C$;

39. $\sec x - \frac{2}{3}\sec^3 x + \frac{1}{5}\sec^5 x + C$; 40. $-\frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{6}\cot^6 x + C$; 41. $\frac{1}{6}\tan^2(3x) - \frac{1}{3}\ln|\sec(3x)| + C$;

42. $\dfrac{2}{7}\tan^{7/2} x + \dfrac{2}{3}\tan^{3/2} x + C$; 43. $\frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$; 44. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}\csc^2 x - 2\ln|\operatorname{sen} x| + C$;

45. $-\operatorname{sen} x - \csc x + C$; 46. $\frac{\tan^9(ax)}{9a} + \frac{2\tan^7(ax)}{7a} + \frac{\tan^5(ax)}{5a} + C$; 47. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$;

48. $\dfrac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \ln|\sec x| + C$; 49. $\frac{3}{5}\cos^{10/3} x - \frac{3}{4}\cos^{4/3} x - \frac{3}{16}\cos^{16/3} x + C$; 50. $\frac{\theta}{16} - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4\theta) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2\theta) + C$;

51. $\frac{3}{128}\theta - \frac{1}{128}\operatorname{sen}(4\theta) + \frac{1}{1024}\operatorname{sen}(8\theta) + C$; 52. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$; 53. $\frac{\sec^6 x}{6} - \frac{\sec^4 x}{2} + \frac{\sec^2 x}{2} + C$; 54. $2\sqrt{\tan t} + C$;

55. $-\frac{1}{3}\cot^3\theta + C$; 56. $-\frac{1}{3}\cot^3\theta - \frac{1}{5}\cot^5\theta + C$; 57. $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$; 58. $\tan x - \cot x + C$;

59. $\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t + \frac{3}{5}\operatorname{sen}^5 t - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 t + C$; 60. $\frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x} + C$; 61. $\frac{1}{7}\cos^7(2t) - \frac{1}{10}\cos^5(2t) - \frac{1}{18}\cos^9(2t) + C$;

62. $-\frac{1}{4}\cos(2y) - \frac{1}{8}\cos(4y) + C$; 63. $-\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C$; 64. $-\frac{1}{5}\cot^5\theta - \frac{1}{7}\cot^7\theta + C$;

65. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right) + C$; 66. $-\frac{1}{5a}\tan^5(b-ax) - \frac{2}{3a}\tan^3(b-ax) - \frac{1}{a}\tan(b-ax) + C$;

67. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{20}\operatorname{sen}(10x) + \frac{1}{160}\operatorname{sen}(20x) + C$; 68. $\operatorname{sen} t - \cos t + C$; 69. $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} t - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^{7/2} t + C$;

70. $\frac{1}{5}\cos^5(3x) - \frac{1}{9}\cos^3(3x) - \frac{1}{7}\cos^7(3x) + \frac{1}{27}\cos^9(3x) + C$; 71. $\frac{5}{16}t + \frac{15}{64}\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{64}\operatorname{sen}(4t) + \frac{1}{192}\operatorname{sen}(6t) + C$;

72. $\frac{3}{2}x + \cos(2x) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x) + C$; 73. $-\frac{\cot^5(3x)}{15} + \frac{\cot^3(3x)}{9} - \frac{\cot(3x)}{3} - x + C$; 74. $\ln|\tan t| + C$; 75. $-\frac{\cot^5 x}{5} + C$;

76. $\frac{1}{16}\omega - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(2\omega) + \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3\omega + C$; 77. $-\frac{1}{3}\csc^3 x + C$; 78. $\tan t + \frac{2}{3}\tan^3 t + \frac{1}{5}\tan^5 t + C$; 79. $-\frac{\cot^8 x}{8} + C$;

80. $\operatorname{sen} x + \csc^2 x - \frac{1}{5}\csc^5 x + C$; 81. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{16}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2x) + C$; 82. $\frac{1}{10}\operatorname{sen}^{10} x - \frac{1}{12}\operatorname{sen}^{12} x + C$;

83. $-\frac{2}{3}\cot^3 x - \cot x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C$; 84. $\frac{3}{8}t + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4t) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(8t) + C$; 85. $\frac{2}{5}\sec^{5/2} x - 2\sec^{1/2} x + C$;

86. $\frac{1}{5}\tan(5t) - t + C$; 87. $\sec x + \ln|\csc x - \cot x| + C$; 88. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{7}\sec^7 x + C$;

89. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4t) + C$; 90. $-\frac{1}{2}\csc(2t) - \frac{1}{2}\cot(2t) + C$; 91. $\frac{5}{16}x + \frac{5}{64}\operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x) + \frac{1}{576}\operatorname{sen}(18x) + C$;

92. $-\frac{1}{2}\cot^2\theta + C$; 93. $\sqrt{x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{x}\right) + C$; 94. $\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega}\operatorname{sen}(2t\omega)\right)\cos\phi + \frac{\operatorname{sen}\phi}{2\omega}\operatorname{sen}^2(\omega t) + C$;

95. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$; 96. $\frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{6}\cos(3x) + C$; 97. $\frac{1}{24}\cos\left(3x^2\right) - \frac{3}{8}\cos\left(x^2\right) + C$;

98. $-\frac{1}{20}\cot^5(4w) + \frac{1}{12}\cot^3(4w) - \frac{1}{4}\cos(4w) - w + C$; 99. $x + C$; 100. $-\frac{1}{3}\csc^3 x + C$; 101. $\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\operatorname{sen}\left(2t^2\right) + C$;

102. $\frac{1}{10}\tan^5(2x) - \frac{1}{6}\tan^3(2x) + \frac{1}{2}\tan(2x) - 2x + C$; 103. $\frac{4}{3}\cos^3\left(\sqrt{x}\right) - 2\cos\left(\sqrt{x}\right) - \frac{2}{5}\cos^5\left(\sqrt{x}\right) + C$;

104. $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$; 105. $-\frac{1}{6}\cot^3(2t) + \frac{1}{2}\cot(2t) + t + C$; 106. $\frac{3}{64}\sqrt{x} - \frac{1}{64}\operatorname{sen}\left(4\sqrt{x}\right) + \frac{1}{512}\operatorname{sen}\left(8\sqrt{x}\right) + C$;

107. $\frac{1}{24}\cos(6x) - \frac{1}{16}\cos(4x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + C$; 108. $\frac{1}{4}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x - \frac{1}{10}\cos^{10} x + C$; 109. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{14}\operatorname{sen}(7x) + C$;

110. $\cos(2b)\operatorname{sen}(at+b) - \frac{\cos(2b)}{3}\operatorname{sen}^3(at+b) + \frac{\operatorname{sen}(2b)}{3}\operatorname{sen}^3(at+b) + C$; 111. $\frac{1}{3}\sec^3 t + C$;

112. $\frac{5}{128}t - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{128}\operatorname{sen}(4t) + \frac{1}{192}\operatorname{sen}(6t) - \frac{1}{1024}\operatorname{sen}(8t) + C$; 113. $\frac{1}{12}\tan^3(4x) - \frac{1}{4}\tan(4x) + x + C$;

114. $\frac{1}{7}\tan(7x) + \frac{1}{21}\tan^3(7x) + C$; 115. $-\frac{\cot^7 x}{7} - \frac{2\cot^9 x}{9} - \frac{\cot^{11} x}{11} + C$; 116. $-\csc^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left|\csc\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$;

117. $\frac{1}{6}\sec^6 t + C$; 118. $\tan t - 2\cot t - \frac{1}{3}\cot^3 t + C$; 119. $\frac{2}{5}\sec^{5/2} t - 4\sec^{1/2} t - \frac{2}{3}\sec^{-3/2} t + C$;

120. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{14}\operatorname{sen}(7x) + C$; 121. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \csc x - 2\operatorname{sen} x + C$; 122. $\frac{4}{3}\tan^{3/2} t - 2\tan^{-1/2} t + \frac{2}{7}\tan^{7/2} t + C$;

123. $\frac{1}{2}\cos y - \frac{1}{18}\cos(9y) + C$; 124. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3y) + \frac{1}{10}\operatorname{sen}(5y) + C$; 125. $-\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^6 x}{2} - \frac{3\cot^8 x}{8} - \frac{\cot^{10} x}{10} + C$;

126. $\frac{1}{4}\cos^8\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + C$; 127. $\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{2}\cos x + C$; 128. $\frac{1}{7}\cos^7(\ln x) - \frac{1}{5}\cos^5(\ln x) + C$;

129. $\frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C$; 130. $-\frac{\cot^4 t}{4} - \frac{\cot^6 t}{6} + C$; 131. $\frac{1}{15}\sec^5(3y) - \frac{1}{9}\sec^3(3y) + C$; 132. $\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$;

133. $\frac{5}{21}\csc^{21/5}x-\frac{10}{11}\csc^{11/5}x+5\csc^{1/5}x+C$; 134. $-\frac{1}{2(m+n)}\operatorname{sen}((m+n)x)+\frac{1}{2(m-n)}\operatorname{sen}((m-n)x)+C$;

135. $-\frac{1}{2(m+n)}\cos((m+n)x)-\frac{1}{2(m-n)}\cos((m-n)x)+C$; 136. $\frac{1}{2(m+n)}\operatorname{sen}((m+n)x)+\frac{1}{2(m-n)}\operatorname{sen}((m-n)x)+C$;

137. $\frac{1}{5}\operatorname{senh}^5x+\frac{1}{7}\operatorname{senh}^7x+C$; 138. $-\cot x-\csc x+C$; 139. $\frac{2}{3}\operatorname{sech}^{-3/2}t+4\operatorname{sech}^{1/2}t-\frac{2}{5}\operatorname{sech}^{5/2}t+C$;

140. $\frac{1}{3}\operatorname{sech}^3x-\operatorname{sech}x+C$; 141. $\frac{2}{7}\cosh^{7/2}x-\frac{2}{3}\cosh^{3/2}x+C$; 142. $\frac{1}{4}\coth^4t-\frac{1}{6}\coth^6t+C$;

143. $\frac{2}{5}\operatorname{sech}^5x-\frac{1}{3}\operatorname{sech}^3x-\frac{1}{7}\operatorname{sech}^7x+C$; 144. $\frac{3}{16}\cosh^{16/3}x-\frac{3}{5}\cosh^{10/3}x+\frac{3}{4}\cosh^{4/3}x+C$;

145. $\frac{a}{8}\cosh^8\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{a}{6}\cosh^6\left(\frac{x}{a}\right)+C$; 146. $-\frac{\csc^{14}x}{14}+\frac{\csc^{12}x}{3}-\frac{3}{5}\csc^{10}x+\frac{\csc^8x}{2}-\frac{\csc^6x}{6}+C$;

147. $\frac{3}{50}\cos^{10/3}(e^x)-\frac{3}{20}\cos^{4/3}(e^x)+C$; 148. $\frac{1}{3}\sec^3(\operatorname{arcsen}x)+\sec(\operatorname{arcsen}x)+C$; 149. $\frac{1}{7}\cos^7x-\frac{1}{5}\cos^5x+C$;

150. $\frac{18}{23}\csc^{23/6}x-\frac{18}{11}\,csc^{11/6}x-\frac{6}{\sqrt[6]{\csc x}}-\frac{6}{35}\csc^{35/6}x+C$; 151. $\frac{1}{\ln 3}\left(\ln|\sec(3^x)|-\sec^2(3^x)+\frac{1}{4}\sec^4(3^x)\right)+C$;

152. $\frac{1}{6}\cot^3\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)-\frac{1}{2}\cot\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)+C$; 153. $-\frac{\csc^9x}{9}+\frac{2\csc^7x}{7}-\frac{\csc^5x}{5}+C$;

154. $\frac{1}{8}\operatorname{sen}(3x)-\frac{3}{16}\operatorname{sen}x-\frac{1}{80}\operatorname{sen}(5x)-\frac{3}{112}\operatorname{sen}(7x)+\frac{1}{72}\operatorname{sen}(9x)-\frac{1}{208}\operatorname{sen}(13x)+C$;

155. $\frac{3}{112}\cos(7x)-\frac{1}{8}\cos(3x)-\frac{1}{80}\cos(5x)-\frac{3}{16}\cos x+\frac{1}{72}\cos(9x)-\frac{1}{208}\cos(13x)+C$;

156. $\frac{3}{32}\operatorname{sen}(4x)-\frac{3}{32}\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{96}\operatorname{sen}(6x)-\frac{3}{160}\operatorname{sen}(10x)+\frac{1}{96}\operatorname{sen}(12x)-\frac{1}{288}\operatorname{sen}(18x)+C$;

157. $\left(\frac{6}{11}\tan^{11/3}(\log_2x)+\frac{3}{17}\tan^{17/3}(\log_2x)+\frac{3}{5}\tan^{5/3}(\log_2x)\right)\ln 2+C$; 158. $\left(\frac{4}{15}\cot^{15/4}(\log x)+\frac{4}{7}\cot^{7/4}(\log x)\right)\ln 10+C$;

159. $\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$; 160. $\frac{1}{7}\operatorname{sen}\left(\frac{7x}{2}\right)-\frac{1}{9}\operatorname{sen}\left(\frac{9x}{2}\right)+C$; 161. $\frac{\coth^8t}{8}-\frac{\coth^6t}{6}+C$;

162. $\frac{x}{2}\sec(\arctan x)+\frac{1}{2}\ln|x+\sec(\arctan x)|+C$; 163. $\frac{1}{4\ln 5}\sec^3(\tan(5^x))\tan(\tan(5^x))+\frac{11}{8\ln 5}\sec(\tan(5^x))\tan(\tan(5^x))$
$+\frac{35}{8\ln 5}\ln|\sec(\tan(5^x))+\tan(\tan(5^x))|-\frac{3}{\ln 5}\csc(\tan(5^x))-\frac{1}{3\ln 5}\csc^3(\tan(5^x))+C$;

164. $\frac{5}{128}\ln(\cos t)+\frac{1}{64}\operatorname{sen}(2\ln(\cos t))-\frac{1}{128}\operatorname{sen}(4\ln(\cos t))-\frac{1}{192}\operatorname{sen}(6\ln(\cos t))-\frac{1}{1024}\operatorname{sen}(8\ln(\cos t))+C$;

165. $-\left(\frac{11}{3}+\frac{1}{3}\tan^2x\right)\sqrt{4-\tan^2x}+C$; 166. $\frac{1}{4}\tan x\sec^3x+\frac{3}{8}\tan x\sec x+\frac{3}{8}\ln|\sec x+\tan x|+C$;

167. $-\frac{1}{2}\cot x\csc x+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+C$; 168. $\frac{3}{5}\tanh^{5/3}t-\frac{3}{11}\tanh^{11/3}t+C$; 169. $\operatorname{senh}x-\operatorname{csch}x+C$;

170. $\frac{1}{6}\tan(\cosh x)\sec^5(\cosh x)+\frac{5}{24}\tan(\cosh x)\sec^3(\cosh x)+\frac{15}{48}\tan(\cosh x)\sec(\cosh x)+\frac{15}{48}\ln|\sec(\cosh x)+\tan(\cosh x)|+C$;

171. $\frac{3}{32}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{96}\operatorname{sen}(6x)+\frac{9}{16}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x\right)+\frac{9}{160}\operatorname{sen}\left(\frac{10}{3}x\right)+\frac{9}{224}\operatorname{sen}\left(\frac{14}{3}x\right)+C$; 172. $3\tanh^{1/3}x-\frac{3}{7}\tanh^{7/3}x+C$;

173. $\frac{3}{16}x+\frac{1}{64}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)+\frac{1}{24}\operatorname{sen}(6x)+\frac{3}{160}\operatorname{sen}(10x)+\frac{1}{192}\operatorname{sen}(12x)+\frac{1}{128}\operatorname{sen}(16x)+\frac{1}{704}\operatorname{sen}(22x)+C$;

174. $\frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x)+\frac{1}{48}\operatorname{sen}(6x)+\frac{3}{128}\operatorname{sen}(8x)+\frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x)+\frac{1}{256}\operatorname{sen}(16x)+C$; 175. 0; 176. $\frac{1}{2}$;

177. $\frac{135}{128}$; 178. 0; 179. $-\frac{1}{4}\cot x\csc^3x-\frac{3}{8}\cot x\csc x+\frac{3}{8}\ln|\csc x-\cot x|+C$; 180. $\frac{6}{7}$;

181. $\frac{1}{2(m+n)}\operatorname{senh}((m+n)x)-\frac{1}{2(m-n)}\operatorname{senh}((m+n)x)+C$; 182. $\frac{1}{2(m+n)}\cosh((m+n)x)+\frac{1}{2(m-n)}\cosh((m+n)x)+C$;

183. $\frac{1}{2(m+n)}\operatorname{senh}((m+n)x)+\frac{1}{2(m-n)}\operatorname{senh}((m-n)x)+C$; 184. $\frac{1}{36}\operatorname{senh}(9x)+\frac{1}{28}\operatorname{senh}(7x)+\frac{1}{12}\operatorname{senh}(3x)+\frac{1}{4}\operatorname{senh}x+C$;

185. $\frac{1}{48}\operatorname{senh}(12x)-\frac{1}{24}\operatorname{senh}(6x)-\frac{1}{32}\operatorname{senh}(8x)+\frac{1}{8}\operatorname{senh}(2x)+C$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Método de integración: Sustitución trigonométrica.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.11

- Método de integración: Sustitución trigonométrica.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 245 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Solución : En la guía 3, ejemplo 43 se obtuvo la familia de primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$ por medio de un cambio de variable,

$$u = \frac{x}{\sqrt{5}} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{5}}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \sqrt{5}\,du,$$

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=\sqrt{5}\,du}}}{\sqrt{1-\left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{5}}}_{\substack{\text{Cambio}\\ u=\frac{x}{\sqrt{5}}}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\overbrace{\sqrt{5}\,du}^{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{\sqrt{1-u^2}} = \overbrace{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}^{\substack{\text{Integral de tabla.}\\ \text{Primitiva : arcoseno.}}} = \operatorname{arcsen} u + C = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

En esta guía se obtiene la familia de primitiva de la función f por medio de un cambio trigonométrico. Se hace el cambio trigonométrico

$$x = \sqrt{5}\ \operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{5}\ \cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=\sqrt{5}\ \cos t\ dt}}}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{\sqrt{5}\ \cos t\ dt}{\sqrt{5-\left(\underbrace{\sqrt{5}\ \operatorname{sen} t}_{\substack{\text{Cambio}\\ x=\sqrt{5}\ \operatorname{sen} t}}\right)^2}} = \int \frac{\sqrt{5}\ \cos t\ dt}{\sqrt{\underbrace{5-5\operatorname{sen}^2 t}_{\text{Factor común } 5}}} = \int \frac{\sqrt{5}\ \cos t\ dt}{\sqrt{5\underbrace{\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}_{1-\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t}}} = \int \frac{\sqrt{5}\ \cos t\ dt}{\sqrt{5\cos^2 t}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5}\ \cos t\ dt}{\sqrt{5}\ \cos t} = \overbrace{\underbrace{\int dt}_{\boxed{\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 0}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} = t + C,$$

así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que,

$$x = \sqrt{5}\,\text{sen}\,t; \qquad \Longrightarrow \qquad \text{sen}\,t = \frac{x}{\sqrt{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right).$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

★

Ejemplo 246 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Solución : La familia de primitivas de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ se puede obtener, ya sea por un cambio de variable similar al realizado en el ejemplo 245 o por medio del cambio trigonométrico

$$x = 3\,\text{sen}\,t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = 3\cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\text{Diferencial } dx = 3\cos t\ dt}}}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{3\cos t\ dt}{\sqrt{9 - (3\,\text{sen}\,t)^2}} = \int \frac{3\cos t\ dt}{\sqrt{\underbrace{9 - 9\,\text{sen}^2\,t}_{\boxed{\text{Factor común } 9}}}} = \int \frac{3\cos t\ dt}{\sqrt{9\,\underbrace{\left(1 - \text{sen}^2\,t\right)}_{\boxed{1 - \text{sen}^2\,t = \cos^2 t}}}} = \int \frac{3\cos t\ dt}{\sqrt{9\cos^2 t}}$$

$\boxed{\text{Cambio } x = 3\,\text{sen}\,t}$

$$= \int \frac{3\cos t\ dt}{3\cos t} = \overbrace{\underbrace{\int dt}_{\boxed{\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 0}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} = t + C,$$

así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que,

$$x = 3\operatorname{sen} t; \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{x}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right).$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

★

Ejemplo 247 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

Solución : Se hace el cambio trigonométrico

$$x = \sqrt{5}\ \sec t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{5}\ \sec t\ \tan t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial} \\ dx = \sqrt{5}\sec t\ \tan t\ dt}}}{\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{\sqrt{5}\sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\sec t\right)^2 - 5}} = \int \frac{\sqrt{5}\sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{\underbrace{5\sec^2 t - 5}_{\text{Factor común } 5}}} = \int \frac{\sqrt{5}\sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{5\underbrace{\left(\sec^2 t - 1\right)}_{\sec^2 t - 1 = \tan^2 t}}}$$

$$\underbrace{x}_{\substack{\text{Cambio} \\ x = \sqrt{5}\sec t}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5}\sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{5\tan^2 t}} = \int \frac{\sqrt{5}\sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{5}\tan t} = \int \sec t\ dt = \ln|\sec t + \tan t| + C,$$

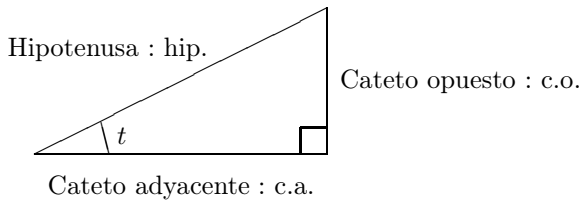
así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \ln|\sec t + \tan t| + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \ln|\sec t + \tan t| + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que,

$$x = \sqrt{5}\ \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

Para calcular $\tan t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,

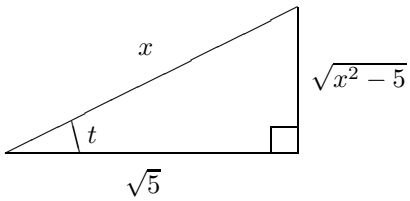


$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = \sqrt{5}\sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}}$$



Por Pitágoras
$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2$

$$\text{c.o.} = \sqrt{x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}$$

entonces,

$$\tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| - \ln\sqrt{5} + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| + C,$$

donde, $C = C_1 - \ln\sqrt{5}$, por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| + C.$$

★

Ejemplo 248 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

Solución : Se escribe la integral como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\ x\right)^2 - 2}},$$

se hace el cambio trigonométrico

$$\sqrt{3}\ x = \sqrt{2}\sec t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad \sqrt{3}\ dx = \sqrt{2}\sec t\ \tan t\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sec t\ \tan t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial}\\ dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sec t\ \tan t\ dt}}}}{\sqrt{(\underbrace{\sqrt{3}\ x}_{\boxed{\substack{\text{Cambio}\\ \sqrt{3}\ x = \sqrt{2}\sec t}}})^2 - 2}} = \int \frac{\overbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}^{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}\sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\sec t\right)^2 - 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int \frac{\sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{\underbrace{2\sec^2 t - 2}_{\boxed{\text{Factor común } 2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int \frac{\sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{2\underbrace{\left(\sec^2 t - 1\right)}_{\boxed{\sec^2 t - 1 = \tan^2 t}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int \frac{\sec t \ \tan t \ dt}{\sqrt{2\tan^2 t}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int \frac{\sec t \ \tan t \ dt}{\underset{\uparrow}{\sqrt{2}} \ \tan t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sec t \ dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln|\sec t + \tan t| + C,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}$$

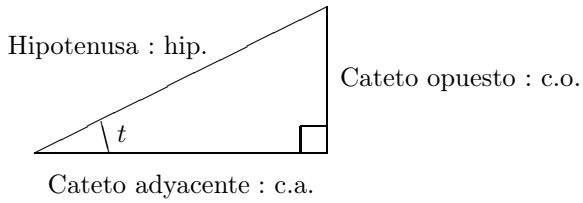
así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln|\sec t + \tan t| + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln|\sec t + \tan t| + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$\sqrt{3}\ x = \sqrt{2} \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{\sqrt{3}\ x}{\sqrt{2}}.$$

Para calcular $\tan t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

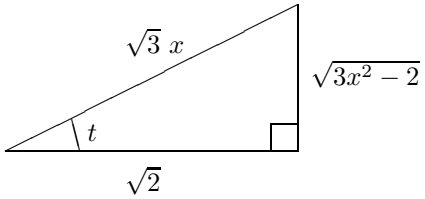
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$\sqrt{3}\ x = \sqrt{2}\ \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{\sqrt{3}\ x}{\sqrt{2}} = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.o.} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\ x\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$



entonces,

$$\tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{2}}.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left|\frac{\sqrt{3}\ x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| + C_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left|\frac{\sqrt{3}\ x + \sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| + C_1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left|\sqrt{3}\ x + \sqrt{3x^2-2}\right| - \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\sqrt{2} + C_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left|\sqrt{3}\ x + \sqrt{3x^2-2}\right| + C,$$

donde, $C = C_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\sqrt{2}$, por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left|\sqrt{3}\ x + \sqrt{3x^2-2}\right| + C.$$

★

Ejemplo 249 *: Integre* $\int \frac{dx}{5+x^2}$.

Solución : La familia de primitivas de la función $f(x) = \frac{1}{5+x^2}$ se puede obtener, por un procedimiento

similar (cambio de variable) al realizado en el ejemplo 245 o por medio del cambio trigonométrico

$$x = \sqrt{5}\ \tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{5}\ \sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=\sqrt{5}\ \sec^2 t\ dt}}}{5+x^2} = \int \frac{\sqrt{5}\ \sec^2 t\ dt}{5+\left(\sqrt{5}\ \tan t\right)^2} = \int \frac{\sqrt{5}\ \sec^2 t\ dt}{\underbrace{5+5\tan^2 t}_{\text{Factor común } 5}} = \int \frac{\sqrt{5}\ \sec^2 t\ dt}{5\underbrace{\left(1+\tan^2 t\right)}_{\tan^2 t+1=\sec^2 t}} = \int \frac{\sqrt{5}\ \sec^2 t\ dt}{5\sec^2 t}$$

Cambio: $x = \sqrt{5}\ \tan t$

$$= \int \frac{\sqrt{5}}{5}\ dt = \frac{\sqrt{5}}{5}\ \overbrace{\int dt}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ t + C,$$

Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración

$\int t^n\,dt = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 0$

como,

$$x = \sqrt{5}\tan t; \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{x}{\sqrt{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right).$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

★

Ejemplo 250 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2}$.

Solución : Se hace el cambio trigonométrico

$$x = \sqrt{2}\ \tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{2}\ \sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=\sqrt{2}\ \sec^2 t\ dt}}}{x^2+2} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2 t\ dt}{\left(\sqrt{2}\ \tan t\right)^2+2} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2 t\ dt}{\underbrace{2\tan^2 t+2}_{\text{Factor común } 2}} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2 t\ dt}{2\underbrace{\left(\tan^2 t+1\right)}_{\tan^2 t+1=\sec^2 t}} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2 t\ dt}{2\sec^2 t}$$

Cambio: $x = \sqrt{2}\ \tan t$

$$= \underbrace{\int \frac{\sqrt{2}}{2}\, dt}_{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overbrace{\underbrace{\int dt}_{\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=0}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, t + C,$$

como,

$$x = \sqrt{2}\tan t; \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{x}{\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

★

Ejemplo 251 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dt}{7+2t^2}$.

Solución : Se escribe la integral como

$$\int \frac{dt}{7+2t^2} = \int \frac{dt}{7+\left(\sqrt{2}t\right)^2},$$

se hace el cambio trigonométrico

$$\sqrt{2}\ t = \sqrt{7}\ \tan z \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad \sqrt{2}\ dt = \sqrt{7}\ \sec^2 z\ dz \qquad \Longrightarrow \qquad dt = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\ \sec^2 z\ dz,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dt}{7+2t^2} = \int \frac{\overbrace{dt}^{\substack{\text{Diferencial} \\ dt = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\ \sec^2 z\ dz}}}{7+(\underbrace{\sqrt{2}\ t}_{\substack{\text{Cambio} \\ \sqrt{2}\ t = \sqrt{7}\ \tan z}})^2} = \int \frac{\overbrace{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\ \sec^2 z\ dz}^{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{7+\left(\sqrt{7}\ \tan z\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \int \frac{\sec^2 z\ dz}{\underbrace{7+7\tan^2 z}_{\text{Factor común } 7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \int \frac{\sec^2 z\ dz}{7\underbrace{\left(1+\tan^2 z\right)}_{\tan^2 z + 1 = \sec^2 z}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \underbrace{\int \frac{\sec^2 z}{7\sec^2 z}\ dz}_{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{2}} \overbrace{\underbrace{\int dz}_{\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=0}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{2}}\ z + C,$$

como,

$$\sqrt{2}\ t = \sqrt{7}\ \tan z \qquad \Longrightarrow \qquad \tan z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\ t \qquad \Longrightarrow \qquad z = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\ t\right).$$

Luego,

$$\int \frac{dt}{7+2t^2} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{2}}\ \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\ t\right) + C.$$

★

Ejemplo 252 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx$.

Solución : Hacemos el cambio trigonométrico

$$x = 2\operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = 2\cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{\substack{\text{Cambio}\\ x=2\operatorname{sen} t}} \overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=2\cos t\ dt}} = \int \sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}\ \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{2\cos t\ dt} = 2\int \sqrt{\underbrace{4-4\operatorname{sen}^2 t}_{\text{Factor común } 4}}\ \cos t\ dt = 2\int \sqrt{4\underbrace{\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}_{1-\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t}}\ \cos t\ dt$$

$$= 2\int \sqrt{4\ \cos^2 t}\ \cos t\ dt = 2\int \underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{2}\cos t\cos t\ dt = 4\int \cos^2 t\ dt,$$

para la familia de primitiva de la función $f(t) = \cos^2 t$ se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonométrica

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2},$$

así,

$$\int \cos^2 t\ dt = \int \underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{\frac{1+\cos(2t)}{2}}\ dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))\,dt \underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(t)+g(t))\,dt = \int f(t)\,dt + \int g(t)\,dt}}{=} \frac{1}{2}\left(\int dt + \int \cos(2t)\ dt\right),$$

donde, la primera integral del lado derecho de la igualdad es inmediata

$$\int dt = t + C_1,$$

mientras que, la segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve al proponer el cambio de variable

$$u = 2t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(2t)\ dt = \int \cos u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + C_2.$$

$\uparrow$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

Luego,

$$\int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right] + C_3 = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + C_3 = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + C_3,$$

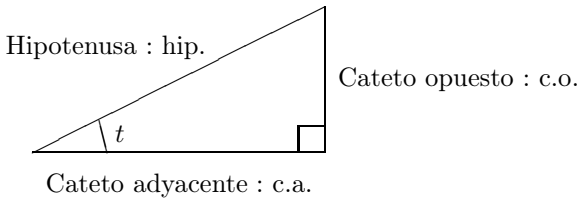
así,

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 4\int \cos^2 t\ dt = 4\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + C_1\right) = 2t + 2\operatorname{sen} t\cos t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = 2t + 2\operatorname{sen} t\cos t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = 2\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{x}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Para calcular $\cos t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

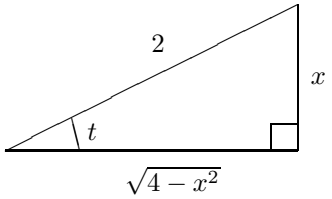
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = 2\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{x}{2} = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.a.} = \sqrt{(2)^2 - x^2}$$



entonces,

$$\cos t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2},$$

es decir,

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2t + 2\operatorname{sen} t\cos t + C = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ \frac{x}{2}\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\ \sqrt{4-x^2}}{2} + C.$$

Luego,

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\ \sqrt{4-x^2}}{2} + C.$$

★

Ejemplo 253 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt{4x-4x^2+7}\ dx.$

Solución : Se completa cuadrados

$$4x-4x^2+7=-\ 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8=-\ (2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8=-\ \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+8=-\ (2x-1)^2+8$$

entonces

$$\int \sqrt{4x-4x^2+7}\ dx=\int \sqrt{8-(2x-1)^2}\ dx.$$

Se propone el cambio de variable

$$u=2x-1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=2\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2}=dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

La integral queda

$$\int \sqrt{8-(\underbrace{2x-1}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Cambio } u=2x-1}}})^2}\ \overbrace{dx}^{\substack{\boxed{\text{Diferencial } dx=\frac{du}{2}} \\ \downarrow}}=\int \sqrt{8-u^2}\ \underbrace{\frac{du}{2}}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}}=\frac{1}{2}\int \sqrt{8-u^2}\ du.$$

Se observa que, la nueva integral tiene la estructura de la integral del ejemplo anterior 252, entonces, se hace la sustitución trigonométrica

$$u=\sqrt{8}\ \operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=\sqrt{8}\ \cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt{8-u^2}\ \overbrace{du}^{\substack{\boxed{\text{Diferencial } du=\sqrt{8}\ \cos t\ dt} \\ \downarrow}}=\int \sqrt{8-\left(\sqrt{8}\ \operatorname{sen} t\right)^2}\ \overbrace{\sqrt{8}\ \cos t\ dt}^{\substack{\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}} \\ \downarrow}}=\sqrt{8}\int \sqrt{\underbrace{8-8\operatorname{sen}^2 t}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Factor común } 8}}}}\ \cos t\ dt$$

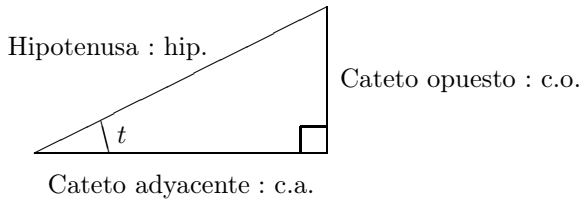
$$=\sqrt{8}\int \sqrt{8\underbrace{\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{1-\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t}}}}\ \cos t\ dt=\sqrt{8}\int \sqrt{8\ \cos^2 t}\ \cos t\ dt=\sqrt{8}\int \underbrace{\sqrt{8}}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}}\ \cos t\ \cos t\ dt$$

$$= 8 \underbrace{\int \cos^2 t \; dt}_{\boxed{\text{Ver ejemplo 252}}} = 8\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \;\cos t\right) + C = 4t + 4\operatorname{sen} t \;\cos t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = 4t + 4\operatorname{sen} t \cos t + C$, en términos de la variable de integración u, puesto que,

$$u = \sqrt{8}\;\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{u}{\sqrt{8}} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{\sqrt{8}}\right).$$

Para calcular $\cos t$ en función de u, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

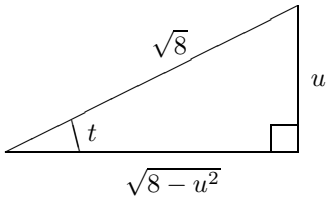
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$u = \sqrt{8}\;\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{u}{\sqrt{8}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.a.} = \sqrt{\left(\sqrt{8}\right)^2 - u^2}$$



entonces,

$$\cos t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{8-u^2}}{\sqrt{8}},$$

de aquí,

$$\int \sqrt{8-u^2}\; du = 4t + 4\operatorname{sen} t \;\cos t + C = 4\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{\sqrt{8}}\right) + 4\;\frac{u}{\sqrt{8}}\;\frac{\sqrt{8-u^2}}{\sqrt{8}} + C$$

$$= 4\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{\sqrt{8}}\right) + \frac{u\;\sqrt{8-u^2}}{2} + C.$$

Así,

$$\int \sqrt{8-u^2}\; du = 4\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{\sqrt{8}}\right) + \frac{u\;\sqrt{8-u^2}}{2} + C,$$

regresando el cambio de variable, como $u = 2x - 1$, entonces la familia de primitiva de la función

$$g(x) = \sqrt{4x - 4x^2 + 7},$$

viene dada por

$$\int \sqrt{4x - 4x^2 + 7}\; dx = 4\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{8}}\right) + \frac{(2x-1)\;\sqrt{8-(2x-1)^2}}{2} + C.$$

Luego,

$$\int \sqrt{4x-4x^2+7}\ dx = 4\,\text{arcsen}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{8}}\right) + \frac{(2x-1)\ \sqrt{4x-4x^2+7}}{2} + C.$$

Observación : Esta integral se puede resolver por medio del cambio trigonométrico

$$2x-1=\sqrt{8}\ \text{sen}\,t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad 2\ dx=\sqrt{8}\ \cos t\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad dx=\frac{\sqrt{8}}{2}\ \cos t\ dt,$$

★

Ejemplo 254 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Solución : Se completa cuadrados

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}.$$

Se hace la sustitución trigonométrico

$$x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}\ \tan t=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

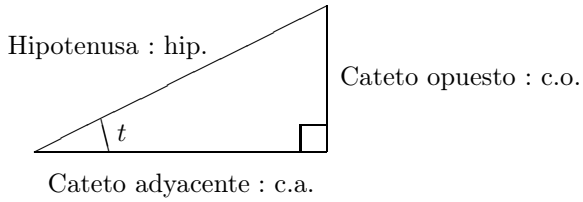
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\text{Diferencial}\ dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \sec^2 t\ dt}}}{\sqrt{(\underbrace{x+1/2}_{\boxed{\text{Cambio}\ x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \tan t}})^2+3/4}} = \int \frac{\sqrt{3}/2\ \sec^2 t\ dt}{\sqrt{\left(\sqrt{3}/2\tan t\right)^2+3/4}} = \int \frac{\sqrt{3}/2\ \sec^2 t\ dt}{\sqrt{\underbrace{3/4\tan^2 t+3/4}_{\boxed{\text{Factor común}\ \frac{3}{4}}}}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3}/2\ \sec^2 t\ dt}{\sqrt{3/4\underbrace{\left(\tan^2 t+1\right)}_{\boxed{\tan^2 t+1=\sec^2 t}}}} = \int \frac{\sqrt{3}/2\ \sec^2 t\ dt}{\sqrt{3/4\ \sec^2 t}} = \int \frac{\sqrt{3}/2\ \sec^2 t\ dt}{\sqrt{3}/2\ \sec t} = \int \sec t\ dt = \ln|\sec t+\tan t|+C_1,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t)=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Para calcular $\sec t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

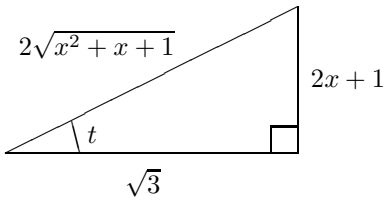
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras
$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2$

$$\text{hip.} = \sqrt{(2x+1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$



entonces,

$$\sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} = \frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}},$$

así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right| - \ln\sqrt{3} + C_1 = \ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right| + C,$$

donde $C = C_1 - \ln\sqrt{3}$.

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right| + C.$$

★

Ejemplo 255 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+14}}$.

Solución : Se completa cuadrados

$$x^2 + 8x + 14 = (x+4)^2 - 2$$

entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+14}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+4)^2-2}}.$$

Se hace la sustitución trigonométrico

$$x + 4 = \sqrt{2}\ \sec t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{2}\ \sec t\ \tan t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+14}} = \int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=\sqrt{2}\ \sec t\ \tan t\ dt}}}}{\sqrt{(\underbrace{x+4}_{\boxed{\substack{\text{Cambio}\\ x+4=\sqrt{2}\ \sec t}}})^2-2}} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\ \sec t\right)^2-2}} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{\underbrace{2\sec^2 t-2}_{\boxed{\text{Factor común } 2}}}}$$

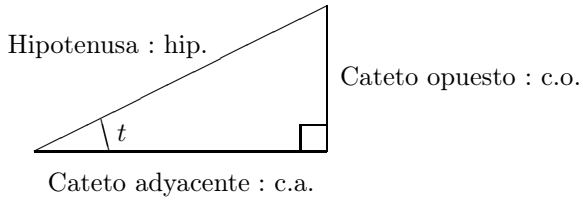
$$= \int \frac{\sqrt{2}\ \sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{2\ \underbrace{\left(\sec^2 t-1\right)}_{\boxed{\sec^2 t-1=\tan^2 t}}}} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{2}\ \tan^2 t} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec t\ \tan t\ dt}{\sqrt{2}\ \tan t},$$

$$= \int \sec t\ dt = \ln|\sec t+\tan t| + C_1,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \ln|\sec t+\tan t| + C_1$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x+4=\sqrt{2}\ \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x+4}{\sqrt{2}}.$$

Para calcular $\tan t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

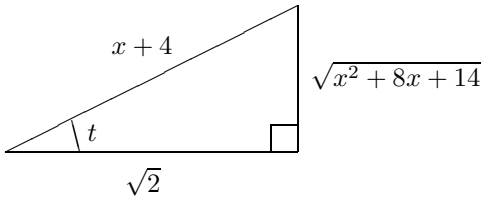
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x+4=\sqrt{2}\ \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x+4}{\sqrt{2}} = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.o.} = \sqrt{(x+4)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$



entonces,

$$\tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{x^2+8x+14}}{\sqrt{2}},$$

así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+14}} = \ln\left|\frac{x+4}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2+8x+14}}{\sqrt{2}}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{x+4+\sqrt{x^2+8x+14}}{\sqrt{2}}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+14}\right| - \ln\sqrt{2} + C_1 = \ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+14}\right| + C,$$

donde $C = C_1 - \ln\sqrt{2}$.

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+14}} = \ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+14}\right| + C.$$

★

Ejemplo 256 *: Integre* $\displaystyle\int x^3\ \sqrt{x^2-5}\ dx.$

Solución : Se hace la sustitución trigonométrica

$$x = \sqrt{5}\ \sec t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{5}\ \sec t\ \tan t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \underset{\substack{\boxed{\text{Cambio}\ x=\sqrt{5}\ \sec t}}}{\underset{\uparrow}{x^3}}\ \sqrt{\underset{\uparrow}{x^2-5}}\ \underbrace{dx}_{\substack{\boxed{\text{Diferencial}\ dx=\sqrt{5}\ \sec t\ \tan t\ dt}}} = \int \left(\sqrt{5}\ \sec t\right)^3\ \sqrt{\left(\sqrt{5}\ \sec t\right)^2-5}\ \left(\sqrt{5}\ \sec t\ \tan t\ dt\right)$$

$$= \int \overbrace{5\sqrt{5}}^{\substack{\boxed{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}\ \sec^3 t\ \sqrt{\underbrace{5\ \sec^2 t-5}_{\substack{\boxed{\text{Factor común}\ 5}}}}\ \left(\overbrace{\sqrt{5}}^{\substack{\boxed{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}\ \sec t\ \tan t\ dt\right)$$

$$= \left(5\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}\right)\int \sec^3 t\ \sqrt{5\underbrace{\left(\sec^2 t-1\right)}_{\substack{\boxed{\sec^2 t-1=\tan^2 t}}}}\ \sec t\ \tan t\ dt = 25\int \sec^3 t\ \sqrt{5\tan^2 t}\ \sec t\ \tan t\ dt$$

$$= 25\int \sec^3 t\ \underbrace{\sqrt{5}}_{\substack{\boxed{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}\ \tan t\ \sec t\ \tan t\ dt = 25\sqrt{5}\ \underbrace{\int \sec^4 t\ \tan^2 t\ dt}_{\substack{\boxed{\text{Integral de funciones}\\ \text{trigonométricas con potencias}}}},$$

para obtener la familia de primitiva de la función $f(t) = \tan^2 t\ \sec^4 t$ se observa que como la potencia de la secante es par, la integral se escribe como

$$\int \tan^2 t\ \overset{\substack{\boxed{\text{Potencia par.}\\ \text{Tomar un término}\ \sec^2 t.}}}{\sec^4} t\ dt = \int \tan^2 t\ \sec^2 t\ \underset{\substack{\boxed{\text{Futuro diferencial.}}}}{\underset{\uparrow}{\underline{\sec^2 t\ dt}}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\sec^2 t\ dt}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\tan t$, así, cabe la pregunta

$$\int \tan^2 t\ \sec^4 t\ dt = \int \tan^2 t\ \underbrace{\sec^2 t}_{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}\ \underline{\sec^2 t\ dt},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t,$$

se tiene,

$$\int \tan^2 t\ \sec^2 t\ \underline{\sec^2 t\ dt} = \int \tan^2 t\ \underbrace{\sec^2 t}_{\boxed{\tan^2 t + 1 = \sec^2 t}}\ \underline{\sec^2 t\ dt} = \int \tan^2 t\ \left(\tan^2 t + 1\right)\ \underline{\sec^2 t\ dt}.$$

Se observa que en el nuevo integrando aparece la función tangente y su correspondiente derivada, la función secante al cuadrado, así, se propone el cambio de variable

$$u = \tan x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \underline{\sec^2 t\ dt},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^2 t\ \sec^4 t\ dt = \int \tan^2 t\ \left(\tan^2 t + 1\right)\ \underline{\sec^2 t\ dt} = \int \left(\overbrace{\tan t}^{\boxed{\text{Cambio } u = \tan t}}\right)^2 \left(\left(\overbrace{\tan t}^{\boxed{\text{Cambio } u = \tan t}}\right)^2 + 1\right) \overbrace{\underline{\sec^2 t\ dt}}^{\boxed{\text{Diferencial } du = \underline{\sec^2 t\ dt}}}$$

$$= \int u^2\ \left(u^2 + 1\right)\ du = \int \left(u^4 + u^2\right)\ du = \overbrace{\underbrace{\int u^4\ du}} + \overbrace{\underbrace{\int u^2\ du}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\end{array}} \qquad \boxed{\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 4 \ \text{ y } \ n = 2}$$

$$= \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{5}\tan^5 t + \frac{1}{3}\tan^3 t + C.$$

Luego,

$$\int \tan^2 t\ \sec^4 t\ dt = \frac{1}{5}\tan^5 t + \frac{1}{3}\tan^3 t + C,$$

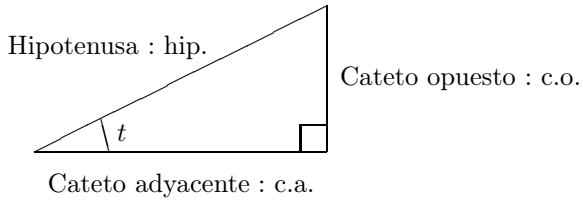
entonces

$$\int x^3\ \sqrt{x^2 - 5}\ dx = 25\sqrt{5}\left(\frac{1}{5}\tan^5 t + \frac{1}{3}\tan^3 t\right) + C = 5\sqrt{5}\ \tan^5 t + \frac{25\sqrt{5}}{3}\ \tan^3 t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = 5\sqrt{5}\ \tan^5 t + \dfrac{25\sqrt{5}}{3}\ \tan^3 t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = \sqrt{5}\ \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{\sqrt{5}}.$$

Para calcular $\tan t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

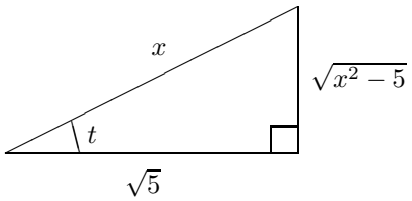
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = \sqrt{5}\ \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.o.} = \sqrt{x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}$$



entonces,

$$\tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}},$$

así,

$$\int x^3\ \sqrt{x^2-5}\ dx = 5\sqrt{5}\ \left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}\right)^5 + \frac{25\sqrt{5}}{3}\ \left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}\right)^3 + C = \frac{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^5}{5} + \frac{5}{3}\ \left(\sqrt{x^2-5}\right)^3 + C$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^3}{5}\ \left(\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2 + \frac{25}{3}\right) + C = \frac{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^3}{5}\ \left(x^2 - 5 + \frac{25}{3}\right) + C$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^3}{5}\ \left(x^2 + \frac{10}{3}\right) + C.$$

Luego,

$$\int x^3\ \sqrt{x^2-5}\ dx = \frac{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^3}{5}\ \left(x^2 + \frac{10}{3}\right) + C.$$

Observación : Esta integral se puede resolver por medio del cambio variable

$$u^2 = x^2 - 5 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad 2u\ du = 2x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad u\ du = x\ dx.$$

Se deja al lector la resolución de esta integral con este cambio. ★

Ejemplo 257 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

Solución : Se hace la sustitución trigonométrica

$$x = 2\sec t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = 2\sec t\ \tan t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\overset{\substack{\text{Cambio}\\ x=2\sec t}}{x^3}\ \overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=2\sec t\ \tan t\ dt}}}{\underset{\substack{\text{Cambio}\\ x=2\sec t}}{\sqrt{x^2-4}}} = \int \frac{(2\sec t)^3\ (2\sec t\ \tan t\ dt)}{\sqrt{(2\sec t)^2-4}} = \int \frac{\left(8\sec^3 t\right)\ (2\sec t\ \tan t\ dt)}{\sqrt{\underbrace{4\sec^2 t-4}_{\text{Factor común } 4}}} = \int \frac{16\sec^4 t\ \tan t\ dt}{\sqrt{4\underbrace{\left(\sec^2 t-1\right)}_{\sec^2 t-1=\tan^2 t}}}$$

$$= \int \frac{16\sec^4 t\ \tan t\ dt}{\sqrt{4\tan^2 t}} = \int \frac{16\sec^4 t\ \tan t\ dt}{2\tan t} = \underbrace{\int 8\sec^4 t\ dt}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}} = 8\underbrace{\int \sec^4 t\ dt}_{\substack{\text{Integral de funciones}\\ \text{trigonométricas con potencias}}}$$

para obtener la familia de primitiva de la función $f(t)=\sec^4 t$ se observa que como la potencia de la secante es par, la integral se escribe como

$$\int \overset{\substack{\text{Potencia par.}\\ \text{Tomar un término } \sec^2 t.}}{\sec^4 t}\ dt = \int \sec^2 t\ \underbrace{\underline{\sec^2 t\ dt}}_{\text{Futuro diferencial.}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\sec^2 t\ dt}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\tan t$, así, cabe la pregunta

$$\int \sec^4 t\ dt = \int \overbrace{\sec^2 t}^{\text{¿Qué hacer con este término?}}\ \underline{\sec^2 t\ dt},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\tan^2 t+1=\sec^2 t,$$

se tiene,

$$\int \sec^4 t\ dt = \int \overbrace{\sec^2 t}^{\tan^2 t+1=\sec^2 t}\ \underline{\sec^2 t\ dt} = \int \left(\tan^2 t+1\right)\ \underline{\sec^2 t\ dt}.$$

Se observa que en el nuevo integrando aparece la función tangente y su correspondiente derivada, la función secante al cuadrado, así, se propone el cambio de variable

$$z=\tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz=\underline{\sec^2 t\ dt},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sec^4 t\ dt = \int \sec^2 t\ \underline{\sec^2 t\ dt} = \int \left(\tan^2 t + 1\right)\ \underline{\sec^2 t\ dt} = \int \left(\left(\overbrace{\tan t}^{\substack{\text{Cambio}\\ z=\tan t}}\right)^2 + 1\right) \overbrace{\underline{\sec^2 t\ dt}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dz=\underline{\sec^2 t\ dt}}}$$

$$= \int \left(z^2+1\right)\ dz \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(z)+g(z))\,dz = \int f(z)\,dz + \int g(z)\,dz}}{=} \int z^2\ dz + \int dz = \overbrace{\underbrace{\int z^2\ dz}}^{\substack{\text{Integrales de una potencia.}\\ \text{Integrales de tabla.}}} + \overbrace{\underbrace{\int dz}}^{\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=2 \ \text{ y } \ n=0} = \frac{z^3}{3} + z + C_1 = \frac{\tan^3 t}{3} + \tan t + C_1,$$

así,

$$\int \sec^4 t\ dt = \frac{1}{3}\tan^3 t + \tan t + C_1,$$

entonces,

$$\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{x^2-4}} = 8\int \sec^4 t\ dt = 8\left(\frac{1}{3}\tan^3 t + \tan t + C_1\right) = \frac{8}{3}\tan^3 t + 8\tan t + C,$$

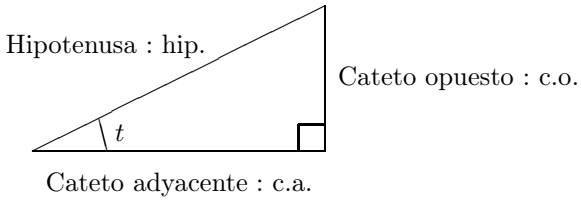
ahora, se expresa la familia de primitiva

$$F(t) = \frac{8}{3}\tan^3 t + 8\tan t + C,$$

en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = 2\sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{2}.$$

Para calcular $\tan t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

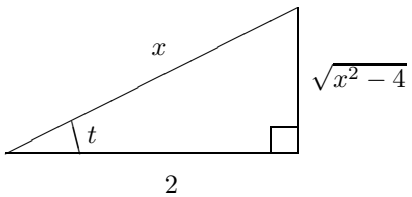
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = 2\sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{2} = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.o.} = \sqrt{x^2 - (2)^2}$$



entonces,

$$\tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2},$$

así,

$$\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3 + 8\ \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + C = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3 + 4\sqrt{x^2-4} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3 + 4\sqrt{x^2-4} + C.$$

Observación : Esta integral se puede resolver por medio del cambio de variable

$$u^2 = x^2 - 5 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad 2u\ du = 2x\ dx \quad \Longrightarrow \quad u\ du = x\ dx.$$

Se deja al lector la resolución de esta integral con este cambio. ★

Ejemplo 258 *: Integre* $\displaystyle\int x^2\ \sqrt{5-x^2}\ dx.$

Solución : Se hace el cambio trigonométrico

$$x = \sqrt{5}\ \operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{5}\ \cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Cambio } x=\sqrt{5}\ \operatorname{sen} t}}}{x^2}\ \sqrt{5-\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}}{x^2}}\ \overbrace{dx}^{\substack{\boxed{\text{Diferencial } dx=\sqrt{5}\ \cos t\ dt} \\ \downarrow}} = \int \left(\sqrt{5}\ \operatorname{sen} t\right)^2\ \sqrt{5-\left(\sqrt{5}\operatorname{sen} t\right)^2}\ \left(\sqrt{5}\ \cos t\ dt\right)$$

$$= \int \overset{\downarrow}{5}\operatorname{sen}^2 t\ \sqrt{\underbrace{5-5\operatorname{sen}^2 t}_{\boxed{\text{Factor común } 5}}}\ \left(\overset{\downarrow}{\sqrt{5}}\ \cos t\ dt\right) = 5\sqrt{5}\int \operatorname{sen}^2 t\ \sqrt{5\underbrace{\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}_{\boxed{1-\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t}}}\ \cos t\ dt$$

$$= 5\sqrt{5}\int \operatorname{sen}^2 t\ \sqrt{5\cos^2 t}\ \cos t\ dt = 5\sqrt{5}\int \operatorname{sen}^2 t\ \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}}{\sqrt{5}}\ \cos t\ \cos t\ dt = 25\ \underbrace{\int \operatorname{sen}^2 t\ \cos^2 t\ dt}_{\boxed{\text{Integral de funciones trigonométricas con potencias}}},$$

para obtener la familia de primitiva de la función $f(t) = \operatorname{sen}^2 t\ \cos^2 t$ se observa que como las potencias de las expresiones seno y coseno son pares, se tiene, por las identidades trigonométricas

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}.$$

que la integral se puede expresar como

$$\int \cos^2 t\ \operatorname{sen}^2 t\ dt = \int \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)\ dt = \int \frac{\overbrace{(1+\cos(2t))(1-\cos(2t))}^{\substack{\text{Producto notable}\\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2}}}{\underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{4}}\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\underbrace{1-\cos^2(2t)}_{\substack{\text{Identidad trigonométrica}\\ \operatorname{sen}^2(\cdot)+\cos^2(\cdot)=1\\ \text{de aquí, } \operatorname{sen}^2(2t)=1-\cos^2(2t)}}\right) dt = \frac{1}{4}\int \underbrace{\operatorname{sen}^2(2t)}_{\substack{\text{Identidad trigonométrica}\\ \operatorname{sen}^2(\cdot)=\frac{1-\cos 2(\cdot)}{2}}}\ dt = \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{1-\cos(4t)}{2}}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}\ dx = \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\int (1-\cos(4t))\, dt$$

$$\underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(t)+g(t))\,dt = \int f(t)\,dt + \int g(t)\,dt}}{=} \frac{1}{8}\left(\int dt - \int \cos(4t)\ dt\right) = \frac{1}{8}\int dt - \frac{1}{8}\int \cos(4t)\ dt.$$

Se calcula las integrales. La primera integral es sencilla

$$\int dt = t + C_1.$$

Para la segunda integral, se propone el cambio de variable

$$u = 4t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 4\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{4} = dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos\overbrace{(4t)}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=4t}}\ \overbrace{dt}^{\substack{\text{Diferencial}\\ \frac{du}{4}=dt}} = \int \cos u\ \underset{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{\frac{du}{4}} = \frac{1}{4}\int \cos u\ du = \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t) + C_2.$$

Luego,

$$\int \cos^2 t\ \operatorname{sen}^2 t\ dt = \frac{1}{8}(t+C_1) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t) + C_2\right) = \frac{t}{8} - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4t) + C,$$

es decir,

$$\int \cos^2 t \ \operatorname{sen}^2 t \ dt = \frac{t}{8} - \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4t) + C.$$

pero,

$$\operatorname{sen}(4t) = 2\operatorname{sen}(2t) \ \cos(2t) = 2\left(2\operatorname{sen} t \cos t\right)\left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right) = 4\operatorname{sen} t \cos^3 t - 4\operatorname{sen}^3 t \cos t$$

entonces,

$$\int \cos^2 t \ \operatorname{sen}^2 t \ dt = \frac{t}{8} - \frac{1}{32}\left(4\operatorname{sen} t \cos^3 t - 4\operatorname{sen}^3 t \cos t\right) + C,$$

es decir,

$$\int \cos^2 t \ \operatorname{sen}^2 t \ dt = \frac{t}{8} - \frac{1}{8}\operatorname{sen} t \cos^3 t + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^3 t \cos t + C,$$

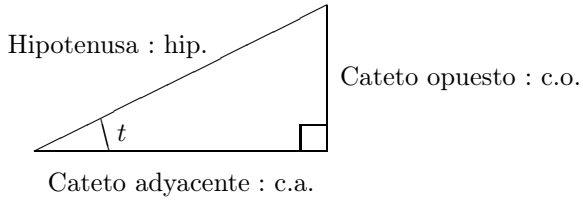
con lo que,

$$\int x^2 \ \sqrt{5-x^2} \ dx = 25\left(\frac{t}{8} - \frac{1}{8}\operatorname{sen} t \cos^3 t + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^3 t \cos t\right) + C = \frac{25}{8} \ t - \frac{25}{8}\operatorname{sen} t \cos^3 t + \frac{25}{8}\operatorname{sen}^3 t \cos t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \frac{25}{8} \ t - \frac{25}{8}\operatorname{sen} t \cos^3 t + \frac{25}{8}\operatorname{sen}^3 t \cos t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = \sqrt{5} \ \operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{x}{\sqrt{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right).$$

Para calcular $\cos t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

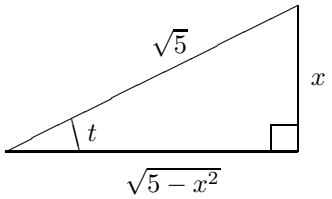
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = \sqrt{5} \ \operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.a.} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}$$



entonces,

$$\cos t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}},$$

es decir,

$$\int x^2 \ \sqrt{5-x^2} \ dx = \frac{25}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \frac{25}{8} \ \frac{x}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}\right)^3 - \frac{25}{8}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^3 \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}} + C$$

$$= \frac{25}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{8} \ x \ \sqrt{\left(5-x^2\right)^3} - \frac{1}{8} \ x^3 \ \sqrt{5-x^2} + C.$$

Luego,

$$\int x^2\ \sqrt{5-x^2}\ dx = \frac{25}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{8}\ x\ \sqrt{\left(5-x^2\right)^3} - \frac{1}{8}\ x^3\ \sqrt{5-x^2} + C.$$

★

Ejemplo 259 *: Integre* $\displaystyle\int x^3\ \sqrt{4-9x^2}\ dx.$

Solución : Se escribe la integral como

$$\int x^3\ \sqrt{4-9x^2}\ dx = \int x^3\ \sqrt{4-(3x)^2}\ dx,$$

y se hace el cambio trigonométrico

$$3x = 2\operatorname{sen} t \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{2}{3}\ \operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \frac{2}{3}\ \cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int x^3\ \sqrt{4-9x^2}\ dx = \int \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Cambio } x=\frac{2}{3}\ \operatorname{sen} t}}}{x^3}\ \sqrt{4-(\underbrace{3x}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Cambio } 3x=2\operatorname{sen} t}}})^2}\ \overbrace{dx}^{\substack{\boxed{\text{Diferencial } dx=\frac{2}{3}\ \cos t\ dt}\\ \downarrow}} = \int \left(\frac{2}{3}\ \operatorname{sen} t\right)^3 \sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}\ \left(\frac{2}{3}\ \cos t\ dt\right)$$

$$= \int \frac{8}{27}\ \operatorname{sen}^3 t\ \sqrt{\underbrace{4-4\operatorname{sen}^2 t}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Factor común } 4}}}}\ \left(\frac{2}{3}\ \cos t\ dt\right) = \int \overset{\substack{\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}\\ \downarrow}}{\frac{16}{81}}\ \operatorname{sen}^3 t\ \sqrt{4\underbrace{\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}_{\boxed{1-\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t}}}\ \cos t\ dt$$

$$= \frac{16}{81}\int \operatorname{sen}^3 t\ \sqrt{4\cos^2 t}\ \cos t\ dt = \frac{16}{81}\int \operatorname{sen}^3 t\ \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}}{(2}\ \cos t)\ \cos t\ dt = \frac{32}{81}\ \underbrace{\int \operatorname{sen}^3 t\ \cos^2 t\ dt}_{\boxed{\text{Integral de funciones trigonométricas con potencias}}}$$

para obtener la familia de primitiva de la función $f(t) = \operatorname{sen}^3 t\ \cos^2 t$ se observa que la potencia de la expresión seno es impar, así, se escribe la integral como

$$\int \overset{\substack{\boxed{\text{Potencia impar. Tomar un término seno.}}\\ \downarrow}}{\operatorname{sen}^3 t}\ \cos^2 t\ dt = \int \operatorname{sen}^2 t\ \cos^2 t\ \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Futuro diferencial.}}}}{\underline{\operatorname{sen} t\ dt}},$$

si el diferencial de la nueva integral será $\underline{\operatorname{sen} t\ dt}$, entonces el cambio de variable que se debe proponer es $\cos t$, así, cabe la pregunta

$$\int \operatorname{sen}^3 t\ \cos^2 t\ dt = \int \underbrace{\operatorname{sen}^2 t}_{\boxed{\text{¿Qué hacer con este término?}}}\ \cos^2 t\ \underline{\operatorname{sen} t\ dt},$$

por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t,$$

por lo que,

$$\int \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t\ dt = \int \underbrace{\operatorname{sen}^2 t}_{\boxed{\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t}}\ \cos^2 t\ \underline{\operatorname{sen} t\ dt} = \int \left(1 - \cos^2 t\right) \cos^2 t\ \underline{\operatorname{sen} t\ dt}.$$

Se observa que en el nuevo integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, se propone el cambio de variable

$$u = \cos t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\operatorname{sen} t\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \underline{\operatorname{sen} t\ dt},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \left(1 - \cos^2 t\right) \cos^2 t\ \underline{\operatorname{sen} t\ dt} = \int \left(1 - \left(\overbrace{\cos t}^{\boxed{\text{Cambio } u = \cos t}}\right)^2\right) \left(\overbrace{\cos t}^{\boxed{\text{Cambio } u = \cos t}}\right)^2 \overbrace{\underline{\operatorname{sen} t\ dt}}^{\boxed{\text{Diferencial } -\ du = \underline{\operatorname{sen} t\ dt}}} = \int \left(1 - u^2\right) u^2 \overbrace{(-du)}^{\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}$$

$$= -\int \left(u^2 - u^4\right)\ du \underset{\boxed{\text{Linealidad de la integral } \int (f(u) + g(u))\, du = \int f(u)\, du + \int g(u)\, du}}{=} -\overbrace{\int u^2\ du}^{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 2 \ \text{ y } \ n = 4}} + \overbrace{\int u^4\ du}^{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 2 \ \text{ y } \ n = 4}} = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} + C.$$

Integrales de una potencia. Integrales de tabla.

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^3 t\ \cos^2 t\ dt = -\ \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} + C.$$

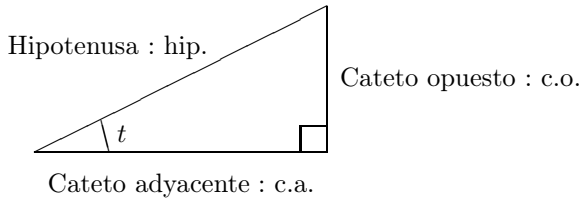
con lo que,

$$\int x^3\ \sqrt{4 - 9x^2}\ dx = \frac{32}{81}\ \int \operatorname{sen}^3 t\ \cos^2 t\ dt = \frac{32}{81}\left(-\ \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5}\right) + C = \frac{32}{405}\ \cos^5 t - \frac{32}{243}\ \cos^3 t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \dfrac{32}{405}\ \cos^5 t - \dfrac{32}{243}\ \cos^3 t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$3x = 2 \operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{3x}{2}.$$

Para calcular $\cos t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

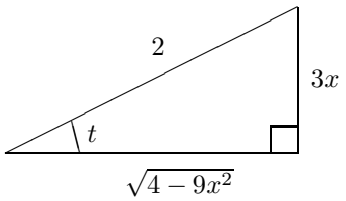
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$3x = 2\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{3x}{2} = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.a.} = \sqrt{(2)^2 - (3x)^2}$$



entonces,

$$\cos t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{4-9x^2}}{2},$$

por lo que,

$$\int x^3\ \sqrt{4-9x^2}\ dx = \frac{32}{405}\ \cos^5 t - \frac{32}{243}\ \cos^3 t + C = \frac{32}{405}\ \left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\right)^5 - \frac{32}{243}\ \left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\right)^3 + C$$

$$= \frac{1}{405}\ \left(\sqrt{4-9x^2}\right)^5 - \frac{4}{243}\ \left(\sqrt{4-9x^2}\right)^3 + C.$$

Luego,

$$\int x^3\ \sqrt{4-9x^2}\ dx = \frac{1}{405}\ \left(\sqrt{4-9x^2}\right)^5 - \frac{4}{243}\ \left(\sqrt{4-9x^2}\right)^3 + C.$$

Observación : Esta integral se puede resolver por medio del cambio de variable

$$u^2 = 4 - 9x^2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad 2u\ du = -18x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad u\ du = -9x\ dx.$$

Se deja al lector la resolución de esta integral con este cambio. ★

Ejemplo 260 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Solución : Se hace el cambio trigonométrico

$$x = 3\operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = 3\cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{(3\operatorname{sen} t)^2\ \ (3\cos t\ dt)}{\sqrt{9-(3\operatorname{sen} t)^2}} = \int \frac{9\operatorname{sen}^2 t\ \ (3\cos t\ dt)}{\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2 t}} = \int \frac{27\operatorname{sen}^2 t\ \cos t\ dt}{\sqrt{9\,(1-\operatorname{sen}^2 t)}}$$

$$= \int \frac{27\,\mathrm{sen}^2\,t\ \cos t\ dt}{\sqrt{9\cos^2 t}} = \int \frac{27\,\mathrm{sen}^2\,t\ \cos t\ dt}{3\cos t} = \int 9\,\mathrm{sen}^2\,t\ dt = 9\int \mathrm{sen}^2\,t\ dt$$

para la familia de primitiva de la función $f(t) = \mathrm{sen}^2\,t$ se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonomética

$$\mathrm{sen}^2\,t = \frac{1-\cos(2t)}{2},$$

se tiene,

$$\int \mathrm{sen}^2\,t\ dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\ dt = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}\left(\int dt - \int \cos(2t)\ dt\right),$$

donde, la primera integral del lado derecho de la igualdad es inmediata

$$\int dt = t + C_1,$$

mientras que, la segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve al proponer el cambio de variable

$$u = 2t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(2t)\ dt = \int \cos u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,u + C_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2t) + C_2.$$

Luego,

$$\int \mathrm{sen}^2\,t\ dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\mathrm{sen}\,(2t)}{2}\right] + C_3 = \frac{t}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,(2t)}{4} + C_3 = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\ \cos t + C_3,$$

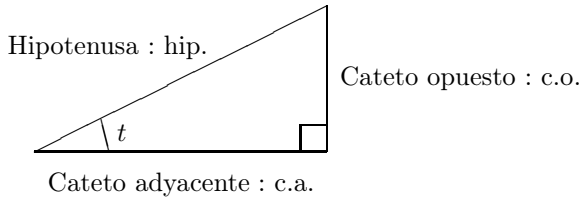
así,

$$\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{9-x^2}} = 9\int \mathrm{sen}^2\,t\ dt = 9\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\cos t + C_1\right) = \frac{9t}{2} - \frac{9}{2}\ \mathrm{sen}\,t\ \cos t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \dfrac{9t}{2} - \dfrac{9}{2}\ \mathrm{sen}\,t\ \cos t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = 3\,\mathrm{sen}\,t \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{sen}\,t = \frac{x}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right).$$

Para calcular $\cos t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\mathrm{sen}\,t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

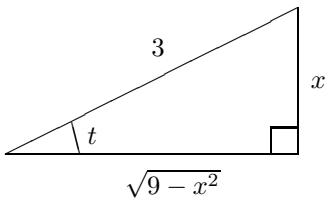
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = 3\,\mathrm{sen}\,t \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{sen}\,t = \frac{x}{3} = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.a.} = \sqrt{(3)^2 - x^2}$$



entonces,

$$\cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3},$$

es decir,

$$\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9t}{2} - \frac{9}{2}\ \operatorname{sen} t\ \cos t + C = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2}\ \frac{x}{3}\ \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x\ \sqrt{9-x^2}}{2} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x\ \sqrt{9-x^2}}{2} + C.$$

★

Ejemplo 261 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ \sqrt{x^2-4}}$.

Solución : Se hace la sustitución trigonométrica

$$x = 2\sec t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = 2\sec t\ \tan t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{x\ \sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec t\ \tan t\ dt}{2\sec t\ \sqrt{(2\sec t)^2-4}} = \int \frac{2\sec t\ \tan t\ dt}{2\sec t\ \sqrt{4\sec^2 t-4}} = \int \frac{2\sec t\ \tan t\ dt}{2\sec t\ \sqrt{4\left(\sec^2 t-1\right)}}$$

$$= \int \frac{2\sec t\ \tan t\ dt}{2\sec t\ \sqrt{4\tan^2 t}} = \int \frac{2\sec t\ \tan t\ dt}{2\sec t\ 2\ \tan t} = \int \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{t}{2} + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \dfrac{t}{2} + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = 2\sec t; \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{2}; \qquad \Longrightarrow \qquad \cos t = \frac{2}{x}; \qquad \Longrightarrow \qquad t = \arccos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x\ \sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\ \arccos\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

★

Ejemplo 262 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ \sqrt{x^2+3}}$.

Solución : Se hace el cambio trigonométrico

$$x = \sqrt{3}\ \tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{3}\ \sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2+3}} = \int \frac{\sqrt{3}\ \sec^2 t\ dt}{\sqrt{3}\ \tan t\ \sqrt{\left(\sqrt{3}\ \tan t\right)^2+3}} = \int \frac{\sec^2 t\ dt}{\tan t\ \sqrt{3\tan^2 t+3}} = \int \frac{\sec^2 t\ dt}{\tan t\ \sqrt{3\left(\tan^2 t+1\right)}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 t\ dt}{\tan t\ \sqrt{3\ \sec^2 t}} = \int \frac{\sec^2 t\ dt}{\tan t\ \sqrt{3}\ \sec t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \int \frac{\sec t}{\tan t}\ dt,$$

donde,

$$\int \frac{\sec t}{\tan t}\ dt = \int \frac{\dfrac{1}{\cos t}}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}\ dt = \int \frac{\cos t}{\cos t\ \operatorname{sen} t}\ dt = \int \frac{1}{\operatorname{sen} t}\ dt = \int \csc t\ dt = \ln|\csc t - \cot t| + C,$$

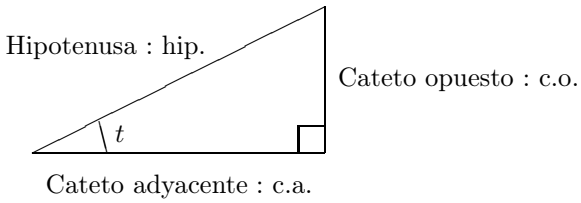
así,

$$\int \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ln|\csc t - \cot t| + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \ln|\csc t - \cot t| + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = \sqrt{3}\ \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Para calcular $\csc t$ y $\cot t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

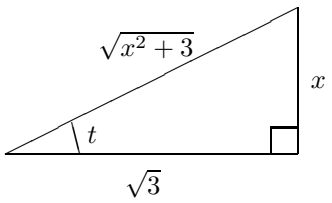
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = \sqrt{3}\ \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{hip.} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$



entonces,

$$\csc t = \frac{\text{hip}}{\text{c.o.}} = \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} \qquad \text{y} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}} = \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ln\left|\frac{\sqrt{3+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{3}}{x}\right| + C.$$

★

Ejemplo 263 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx.$

Solución : Hacemos el cambio trigonométrico

$$x = 3\sec t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = 3\sec t\ \tan t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{(3\sec t)^2-9}}{3\sec t}\,3\sec t\ \tan t\ dt = \int \sqrt{9\sec^2 t-9}\ \tan t\ dt$$

$$= \int \sqrt{9\left(\sec^2 t-1\right)}\ \tan t\ dt = \int \sqrt{9\tan^2 t}\ \tan t\ dt = \int 3\tan t\ \tan t\ dt = 3\int \tan^2 t\ dt,$$

donde,

$$\int \tan^2 t\ dt = \int \left(\sec^2 t-1\right) dt = \int \sec^2 t\ dt - \int dt = \tan t - t + C,$$

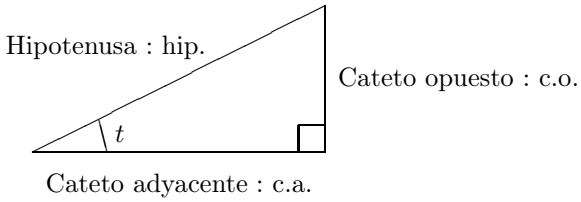
así,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = 3\left(\tan t - t\right) + C = 3\tan t - 3t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = 3\tan t - 3t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = 3\sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos t = \frac{3}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \arccos\left(\frac{3}{x}\right).$$

Para calcular $\tan t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

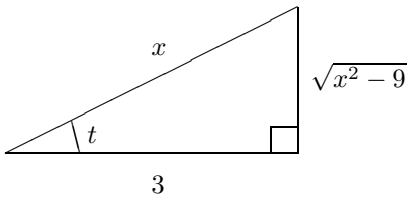
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = 3\sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x}{3} = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.o.} = \sqrt{x^2-(3)^2}$$



entonces,

$$\tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3},$$

es decir,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = 3\,\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - 3\arccos\left(\frac{3}{x}\right) + C = \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\left(\frac{3}{x}\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\ dx = \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\left(\frac{3}{x}\right) + C.$$

★

Ejemplo 264 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+7}}{x^2}\ dx.$

Solución : Hacemos el cambio trigonométrico

$$x = \sqrt{7}\ \tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{7}\ \sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\sqrt{x^2+7}}{x^2}\ dx = \int \frac{\sqrt{\left(\sqrt{7}\ \tan t\right)^2+7}}{\left(\sqrt{7}\ \tan t\right)^2}\ \sqrt{7}\ \sec^2 t\ dt = \int \frac{\sqrt{7\tan^2 t+7}}{7\tan^2 t}\ \sqrt{7}\ \sec^2 t\ dt$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7}\int \frac{\sqrt{7\left(\tan^2 t+1\right)}}{\tan^2 t}\ \sec^2 t\ dt = \frac{\sqrt{7}}{7}\int \frac{\sqrt{7\sec^2 t}}{\tan^2 t}\ \sec^2 t\ dt = \frac{\sqrt{7}}{7}\int \frac{\sqrt{7}\ \sec t}{\tan^2 t}\ \sec^2 t\ dt$$

$$= \int \frac{\sec^3 t}{\tan^2 t}\ dt = \int \frac{\dfrac{1}{\cos^3 t}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}\ dt = \int \frac{\cos^2 t\ dt}{\operatorname{sen}^2 t\ \cos^3 t} = \int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t\ \cos t},$$

para obtener la familia de primitiva de la función $g(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 t\ \cos t}$, se usa la identidad trigonométrica básica

$$1 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$$

y se escribe la integral

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t\ \cos t} = \int \frac{\left(\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t\right) dt}{\operatorname{sen}^2 t\ \cos t} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t\ \cos t}\ dt + \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t\ \cos t}\ dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\ dt,$$

donde,

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \sec t\ dt = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1,$$

mientras que, para la integral $\displaystyle\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\ dt$, se propone el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos t\ dt,$$

la integral queda

$$\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\ dt = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\ du = -\frac{1}{u} + C_2 = -\frac{1}{\operatorname{sen} t} + C_2 = -\csc t + C_2,$$

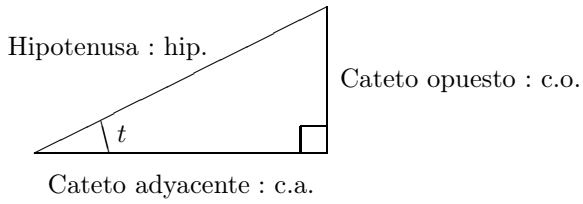
así,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+7}}{x^2}\ dx = \ln\left|\sec t + \tan t\right| - \csc t + C_3,$$

donde $C_3 = C_1 + C_2$, ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \csc t + C_3$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = \sqrt{7}\ \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{x}{\sqrt{7}}.$$

Para calcular $\sec t$ y $\csc t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

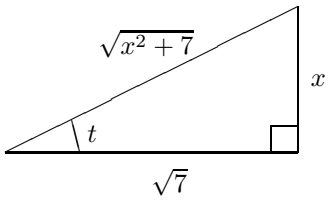
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x = \sqrt{7}\ \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{x}{\sqrt{7}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{hip.} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2}$$



entonces,

$$\csc t = \frac{\text{hip}}{\text{c.o.}} = \frac{\sqrt{7+x^2}}{x} \qquad \text{y} \qquad \sec t = \frac{\text{hip}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{7+x^2}}{\sqrt{7}},$$

por lo que,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+7}}{x^2}\ dx = \ln\left|\frac{\sqrt{7+x^2}}{\sqrt{7}} + \frac{x}{\sqrt{7}}\right| - \frac{\sqrt{7+x^2}}{x} + C_3 = \ln\left|\frac{\sqrt{7+x^2}+x}{\sqrt{7}}\right| - \frac{\sqrt{7+x^2}}{x} + C_3$$

$$= \ln\left|\sqrt{7+x^2}+x\right| - \ln\sqrt{7} - \frac{\sqrt{7+x^2}}{x} + C_3 = \ln\left|\sqrt{7+x^2}+x\right| - \frac{\sqrt{7+x^2}}{x} + C,$$

donde $C = C_3 - \ln\sqrt{7}$. Luego,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+7}}{x^2}\ dx = \ln\left|\sqrt{7+x^2}+x\right| - \frac{\sqrt{7+x^2}}{x} + C.$$

★

Ejemplo 265 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\ dx.$

Solución : Se observa que la derivada del polinomio del denominador es

$$\left(x^2-6x+18\right)' = 2x-6,$$

así, que se escribe la integral como

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\ dx = \int \frac{2x-1-5+5}{x^2-6x+18}\ dx = \int \frac{(2x-6)+5}{x^2-6x+18}\ dx = \int \frac{(2x-6)\ dx}{x^2-6x+18} + 5\int \frac{dx}{x^2-6x+18},$$

donde, la primera integral, $\displaystyle\int \frac{(2x-6)\ dx}{x^2-6x+18}$, se resuelve al proponer el cambio de variable

$$u = x^2-6x+18 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = (2x-6)\ dx,$$

la integral nos queda

$$\int \frac{(2x-6)\ dx}{x^2-6x+18} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_1 = \ln\left|x^2-6x+18\right| + C_1,$$

mientras que, para la segunda integral, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$, se completa cuadrados y se propone un cambio trigonométrico.

Al completar cuadrado se obtiene

$$x^2-6x+18 = (x-3)^2+9,$$

así,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+9},$$

y ahora, se hace el cambio trigonométrico

$$x-3 = 3\tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = 3\sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18} = \int \frac{3\sec^2 t\ dt}{(3\tan t)^2+9} = \int \frac{3\sec^2 t\ dt}{9\tan^2 t+9} = \int \frac{3\sec^2 t\ dt}{9\left(\tan^2 t+1\right)} = \int \frac{\sec^2 t\ dt}{3\sec^2 t} = \frac{1}{3}\int dt = \frac{t}{3}+C_2,$$

así,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18} = \frac{t}{3}+C_2,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \dfrac{t}{3}+C_2$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x-3 = 3\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{x-3}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \arctan\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18} = \frac{1}{3}\ \arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)+C_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\ dx &= \int \frac{(2x-6)\ dx}{x^2-6x+18} + 5\int \frac{dx}{x^2-6x+18}\\ &= \ln\left|x^2-6x+18\right| + C_1 + 5\left(\frac{1}{3}\ \arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)+C_2\right)\\ &= \ln\left|x^2-6x+18\right| + \frac{5}{3}\ \arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)+C,\end{aligned}$$

donde $C = C_1+5C_2$.

Luego,

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\ dx = \ln\left|x^2-6x+18\right| + \frac{5}{3}\ \arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)+C.$$

★

Ejemplo 266 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(x+6)^2}\ dx.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$x = z^2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = 2z\ dz,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(x+6)^2}\ dx = \int \frac{\sqrt{z^2}}{(z^2+6)^2}\ 2z\ dz = 2\int \frac{z^2}{(z^2+6)^2}\ dz.$$

Se hace el cambio trigonométrico

$$z = \sqrt{6}\ \tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = \sqrt{6}\ \sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{z^2}{(z^2+6)^2}\ dz = \int \frac{\left(\sqrt{6}\ \tan t\right)^2}{\left(\left(\sqrt{6}\ \tan t\right)^2+6\right)^2}\ \sqrt{6}\ \sec^2 t\ dt = \int \frac{6\tan^2 t}{\left(6\tan^2 t+6\right)^2}\ \sqrt{6}\ \sec^2 t\ dt$$

$$= \int \frac{6\sqrt{6}\ \tan^2 t\ \sec^2 t}{\left(6\left(\tan^2 t+1\right)\right)^2}\ dt = \int \frac{6\sqrt{6}\ \tan^2 t\ \sec^2 t}{36\left(\sec^2 t\right)^2}\ dt = \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{\tan^2 t\ \sec^2 t}{\sec^4 t}\ dt$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{\tan^2 t}{\sec^2 t}\ dt = \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}{\dfrac{1}{\cos^2 t}}\ dt = \frac{\sqrt{6}}{6}\int \operatorname{sen}^2 t\ dt,$$

para la familia de primitiva de la función $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$ se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonomética

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2},$$

se tiene,

$$\int \operatorname{sen}^2 t\ dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\ dt = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\left(\int dt - \int \cos(2t)\ dt\right),$$

donde, la primera integral del lado derecho de la igualdad es inmediata

$$\int dt = t + C_1,$$

mientras que, la segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve al proponer el cambio de variable

$$u = 2t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(2t)\ dt = \int \cos u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + C_2.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^2 t\ dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right] + C_3 = \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + C_3 = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\ \cos t + C_3,$$

así,

$$\int \frac{z^2}{\left(z^2+6\right)^2}\ dz = \frac{\sqrt{6}}{6}\int \operatorname{sen}^2 t\ dt = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\ \cos t + C_1\right) = \frac{\sqrt{6}}{12}\ t - \frac{\sqrt{6}}{12}\ \operatorname{sen} t\ \cos t + C,$$

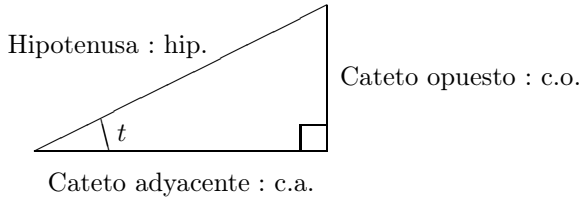
es decir,

$$\int \frac{z^2}{\left(z^2+6\right)^2}\ dz = \frac{\sqrt{6}}{12}\ t - \frac{\sqrt{6}}{12}\ \operatorname{sen} t\ \cos t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \frac{\sqrt{6}}{12}\ t - \frac{\sqrt{6}}{12}\ \operatorname{sen} t\ \cos t + C$, en términos de la variable de integración z, puesto que

$$z = \sqrt{6}\ \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{z}{\sqrt{6}} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{6}}\right).$$

Para calcular $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ en función de z, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

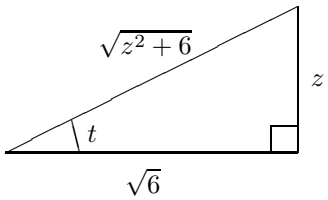
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$z = \sqrt{6}\ \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{z}{\sqrt{6}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{hip.} = \sqrt{z^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2}$$



entonces,

$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip}} = \frac{z}{\sqrt{6+z^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6+z^2}},$$

por lo que,

$$\int \frac{z^2}{\left(z^2+6\right)^2}\ dz = \frac{\sqrt{6}}{12}\ t - \frac{\sqrt{6}}{12}\ \operatorname{sen} t\ \cos t + C = \frac{\sqrt{6}}{12}\ \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\sqrt{6}}{12}\ \frac{z}{\sqrt{6+z^2}}\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6+z^2}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{12}\ \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{12}\ \frac{z}{\left(\sqrt{6+z^2}\right)^2} + C = \frac{\sqrt{6}}{12}\ \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{2}\ \frac{z}{6+z^2} + C,$$

se expresa la familia de primitiva $F(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{12}\ \arctan\left(\dfrac{z}{\sqrt{6}}\right) - \dfrac{1}{2}\ \dfrac{z}{6+z^2} + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x = z^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z = \sqrt{x},$$

así,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(x+6)^2}\ dx = 2\left[\frac{\sqrt{6}}{12}\ \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{x}}{6+x^2}\right] + C = \frac{\sqrt{6}}{6}\ \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\sqrt{x}}{6+x^2} + C,$$

Luego,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(x+6)^2}\ dx = \frac{\sqrt{6}}{6}\ \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\sqrt{x}}{6+x^2} + C.$$

★

Ejemplo 267 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sec^4 x\ dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}}$.

Solución : Se propone el cambio trigonométrico

$$\tan x = 2\operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad \sec^2 x\ dx = 2\cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\sec^4 x\ dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}} = \int \frac{\sec^2 x\ \sec^2 x\ dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}} = \int \frac{\left(\tan^2 x+1\right)}{\sqrt{4-\tan^2 x}}\ \sec^2 x\ dx = \int \frac{\left((2\operatorname{sen} t)^2+1\right)}{\sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}}\ (2\cos t\ dt)$$

$$= \int \frac{\left(4\operatorname{sen}^2 t+1\right)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}}\ (2\cos t\ dt) = \int \frac{\left(4\operatorname{sen}^2 t+1\right)}{\sqrt{4\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}}\ (2\cos t\ dt) = \int \frac{\left(4\operatorname{sen}^2 t+1\right)}{\sqrt{4\cos^2 t}}\ (2\cos t\ dt)$$

$$= \int \frac{\left(4\operatorname{sen}^2 t+1\right)}{2\cos t}\ (2\cos t\ dt) = \int \left(4\operatorname{sen}^2 t+1\right)\ dt = 4\int \operatorname{sen}^2 t\ dt + \int dt,$$

es decir,

$$\int \frac{\sec^4 x\ dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}} = 4\int \operatorname{sen}^2 t\ dt + \int dt,$$

donde,

$$\int dt = t + C_1,$$

mientras que, para la familia de primitiva de la función $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$ se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonomética

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2},$$

se tiene,

$$\int \operatorname{sen}^2 t\ dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\ dt = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\left(\int dt - \int \cos(2t)\ dt\right),$$

donde, la primera integral del lado derecho de la igualdad es inmediata

$$\int dt = t + C_2,$$

mientras que, la segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve al proponer el cambio de variable

$$u = 2t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(2t)\ dt = \int \cos u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C_3 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + C_3.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^2 t\ dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right] + C_4 = \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + C_4 = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\ \cos t + C_4,$$

así,

$$\int \frac{\sec^4 x\ dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}} = 4\int \operatorname{sen}^2 t\ dt + \int dt = 4\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\ \cos t + C_4\right) + t + C_1 = 3t - 2\operatorname{sen} t\ \cos t + C,$$

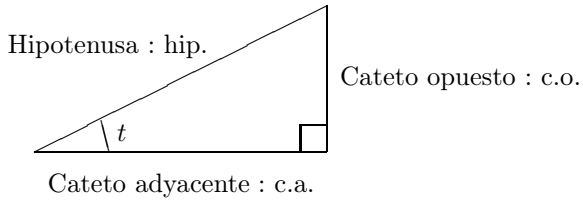
entonces,

$$\int \frac{\sec^4 x\ dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}} = 3t - 2\operatorname{sen} t\ \cos t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = 3t - 2\operatorname{sen} t\ \cos t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$\tan x = 2\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{\tan x}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tan x}{2}\right).$$

Para calcular $\cos t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

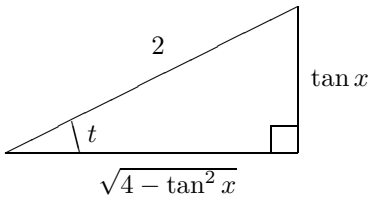
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$\tan x = 2\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{\tan x}{2} = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.a.} = \sqrt{(2)^2 - (\tan x)^2}$$



entonces,

$$\cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{4-\tan^2 x}}{2},$$

es decir,

$$\int \frac{\sec^4 x\ dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}} = 3t - 2\operatorname{sen} t\ \cos t + C = 3\operatorname{arcsen}\left(\frac{\tan x}{2}\right) - 2\ \frac{\tan x}{2}\ \frac{\sqrt{4-\tan^2 x}}{2} + C$$

$$= 3\operatorname{arcsen}\left(\frac{\tan x}{2}\right) - \frac{\tan x\ \sqrt{4-\tan^2 x}}{2} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\sec^4 x\ dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}} = 3\operatorname{arcsen}\left(\frac{\tan x}{2}\right) - \frac{\tan x\ \sqrt{4-\tan^2 x}}{2} + C.$$

★

Ejemplo 268 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{y^2\ dy}{\left(y^2+4\right)^{5/2}}$.

Solución : Se hace la sustitución trigonométrica

$$y = 2\tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dy = 2\sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{y^2\ dy}{\left(y^2+4\right)^{5/2}} = \int \frac{(2\tan t)^2\ \ 2\sec^2 t\ dt}{\left((2\tan t)^2+4\right)^{5/2}} = \int \frac{\left(4\tan^2 t\right)\ \ 2\sec^2 t}{\left(4\tan^2 t+4\right)^{5/2}}\ dt = \int \frac{8\tan^2 t\ \ \sec^2 t}{\left(4\left(\tan^2 t+1\right)\right)^{5/2}}\ dt$$

$$= \int \frac{8\tan^2 t\ \ \sec^2 t}{\left(4\sec^2 t\right)^{5/2}}\ dt = \int \frac{8\tan^2 t\ \ \sec^2 t}{2^5\ \ \sec^5 t}\ dt = \int \frac{\tan^2 t}{2^2\ \ \sec^3 t}\ dt = \frac{1}{4}\int \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t}\ dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}{\dfrac{1}{\cos^3 t}}\ dt = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen}^2 t\ \ \cos^3 t}{\cos^2 t}\ dt = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 t\ \ \cos t\ dt,$$

es decir,

$$\int \frac{y^2\ dy}{\left(y^2+4\right)^{5/2}} = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 t\ \ \cos t\ dt$$

para la familia de primitiva de la función $f(t) = \operatorname{sen}^2 t\ \ \cos t$ se observa que en el integrando aparece la función seno y su correspondiente derivada, la función coseno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^2 t\ \ \cos t\ dt = \int u^2\ du = \frac{u^2}{2} + C_1 = \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen} t\right)^3 + C_1 = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t + C_1,$$

con lo que,

$$\int \operatorname{sen}^2 t\ \ \cos t\ dt = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t + C_1,$$

de aquí,

$$\int \frac{y^2\ dy}{\left(y^2+4\right)^{5/2}} = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 t\ \ \cos t\ dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t + C_1\right) = \frac{1}{12}\operatorname{sen}^3 t + C,$$

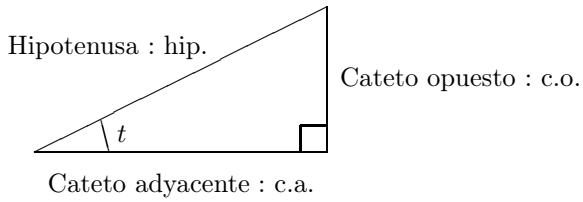
es decir,

$$\int \frac{y^2\ dy}{\left(y^2+4\right)^{5/2}} = \frac{1}{12}\operatorname{sen}^3 t + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \dfrac{1}{12}\operatorname{sen}^3 t + C$, en términos de la variable original de integración y, puesto que

$$y = 2\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{y}{2}.$$

Para calcular $\operatorname{sen} t$ en función de y, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

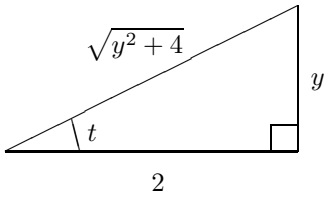
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$y = 2\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{y}{2} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{hip.} = \sqrt{y^2 + (2)^2}$$



entonces,

$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+4}},$$

por lo que,

$$\int \frac{y^2\ dy}{(y^2+4)^{5/2}} = \frac{1}{12}\operatorname{sen}^3 t + C = \frac{1}{12}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)^3 + C = \frac{1}{12}\,\frac{y^3}{\left(\sqrt{y^2+4}\right)^3} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{y^2\ dy}{(y^2+4)^{5/2}} = \frac{1}{12}\,\frac{y^3}{\left(\sqrt{y^2+4}\right)^3} + C.$$

★

Ejemplo 269 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt{2t - t^2}\ dt.$

Solución : Se completa cuadrado

$$2t - t^2 = -(t-1)^2 + 1 = 1 - (t-1)^2,$$

así, la integral se escribe

$$\int \sqrt{2t - t^2}\ dt = \int \sqrt{1 - (t-1)^2}\ dt.$$

Se hace la sustitución trigonométrica

$$t - 1 = \operatorname{sen} z \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dt = \cos z\ dz,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt{2t-t^2}\ dt = \int \sqrt{1-(t-1)^2}\ dt = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}\ \cos z\ dz = \int \sqrt{\cos^2 z}\ \cos z\ dz = \int \cos^2 z\ dz,$$

es decir,

$$\int \sqrt{2t-t^2}\ dt = \int \cos^2 z\ dz,$$

para la familia de primitiva de la función $f(z) = \cos^2 z$ se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonomética

$$\cos^2 z = \frac{1+\cos(2z)}{2},$$

se tiene,

$$\int \cos^2 z\ dz = \int \frac{1+\cos(2z)}{2}\ dz = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2z))\, dz = \frac{1}{2}\left(\int dz + \int \cos(2z)\ dz\right),$$

donde, la primera integral del lado derecho de la igualdad es inmediata

$$\int dz = z + C_1,$$

mientras que, la segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve al proponer el cambio de variable

$$u = 2z \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dz \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dz,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(2z)\ dz = \int \cos u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2z) + C_2.$$

Luego,

$$\int \cos^2 z\ dz = \frac{1}{2}\left[z + \frac{\operatorname{sen}(2z)}{2}\right] + C = \frac{z}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2z)}{4} + C = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} z\ \cos z + C,$$

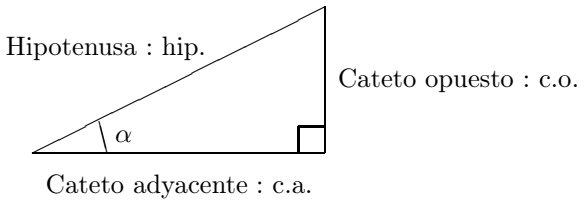
así,

$$\int \sqrt{2t-t^2}\ dt = \int \cos^2 z\ dz = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} z\ \cos z + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} z\ \cos z + C$, en términos de la variable original de integración t, puesto que

$$t - 1 = \operatorname{sen} z \qquad \Longrightarrow \qquad z = \operatorname{arcsen}(t-1).$$

Para calcular $\cos z$ en función de t, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,

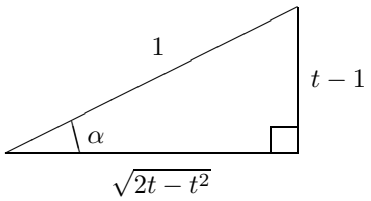


$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$t-1=\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t=\frac{t-1}{1}=\frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$



Por Pitágoras
$(\text{hip.})^2=(\text{c.o.})^2+(\text{c.a.})^2$

$$\text{c.a.}=\sqrt{(1)^2-(t-1)^2}$$

entonces,

$$\cos t=\frac{\text{c.a.}}{\text{hip}}=\frac{\sqrt{2t-t^2}}{1}=\sqrt{2t-t^2},$$

es decir,

$$\int \sqrt{2t-t^2}\ dt=\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} z\ \cos z+C=\frac{1}{2}\ \operatorname{arcsen}(t-1)+\frac{1}{2}\ (t-1)\ \sqrt{2t-t^2}+C.$$

Luego,

$$\int \sqrt{2t-t^2}\ dt=\frac{1}{2}\ \operatorname{arcsen}(t-1)+\frac{1}{2}\ (t-1)\ \sqrt{2t-t^2}+C.$$

★

Ejemplo 270 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+2t}}$.

Solución : Se completa cuadrado

$$t^2+2t=(t+1)^2-1,$$

así, la integral se escribe

$$\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+2t}}=\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{(t+1)^2-1}}.$$

Se hace la sustitución trigonométrica

$$t+1=\sec z \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dt=\sec z\ \tan z\ dz,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{(t+1)^2-1}}=\int \frac{\sec z\ \tan z\ dz}{\sec z\ \sqrt{\sec^2 z-1}}=\int \frac{\sec z\ \tan z\ dz}{\sec z\ \sqrt{\tan^2 z}}=\int \frac{\sec z\ \tan z}{\sec z\ \tan z}\ dz=\int dz=z+C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(z)=z+C$, en términos de la variable original de integración t, puesto que

$$t+1=\sec z \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\cos z}=t+1 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos z=\frac{1}{t+1} \qquad \Longrightarrow \qquad z=\arccos\left(\frac{1}{t+1}\right).$$

de aquí,

$$\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+2t}}=\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{(t+1)^2-1}}=z+C=\arccos\left(\frac{1}{t+1}\right)+C.$$

Luego,

$$\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+2t}}=\arccos\left(\frac{1}{t+1}\right)+C.$$

★

Ejemplo 271 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{t^2\ dt}{\left(t^2+1\right)^2}$.

Solución : Se hace la sustitución trigonométrica

$$t = \tan z \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dt = \sec^2 z\ dz,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{t^2\ dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \int \frac{\tan^2 z\ \sec^2 z\ dz}{\left(\tan^2 z+1\right)^2} = \int \frac{\tan^2 z\ \sec^2 z\ dz}{\left(\sec^2 z\right)^2} = \int \frac{\tan^2 z\ \sec^2 z\ dz}{\sec^4 z} = \int \frac{\tan^2 z}{\sec^2 z}\ dz$$

$$= \int \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z}}{\dfrac{1}{\cos^2 z}}\ dz = \int \frac{\operatorname{sen}^2 z\ \cos^2 z}{\cos^2 z}\ dz = \int \operatorname{sen}^2 z\ dz$$

es decir,

$$\int \frac{t^2\ dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \int \operatorname{sen}^2 z\ dz,$$

para la familia de primitiva de la función $f(z) = \operatorname{sen}^2 z$ se procede de la siguiente manera, por la identidad trigonomética

$$\operatorname{sen}^2 z = \frac{1-\cos(2z)}{2},$$

se tiene,

$$\int \operatorname{sen}^2 z\ dz = \int \frac{1-\cos(2z)}{2}\ dz = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2z))\, dz = \frac{1}{2}\left(\int dz - \int \cos(2z)\ dz\right),$$

donde, la primera integral del lado derecho de la igualdad es inmediata

$$\int dz = z + C_1,$$

mientras que, la segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve al proponer el cambio de variable

$$u = 2z \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\ dz \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dz,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(2z)\ dz = \int \cos u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2z) + C_2.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^2 z\ dz = \frac{1}{2}\left[z - \frac{\operatorname{sen}(2z)}{2}\right] + C = \frac{z}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2z)}{4} + C = \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} z\ \cos z + C,$$

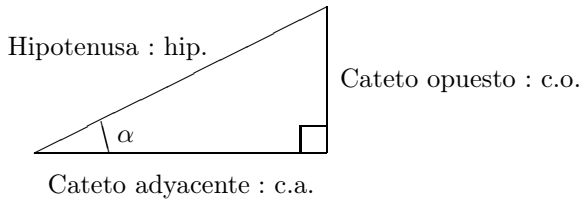
así,

$$\int \frac{t^2\ dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \int \operatorname{sen}^2 z\ dz = \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} z\ \cos z + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(z) = \dfrac{z}{2} - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} z\ \cos z + C$, en términos de la variable original de integración t, puesto que

$$t = \tan z \qquad \Longrightarrow \qquad z = \arctan t.$$

Para calcular $\operatorname{sen} t$ y $\cos z$ en función de t, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



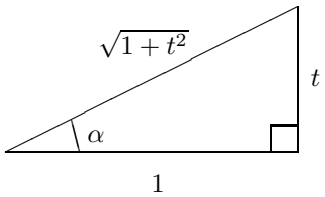
$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$t = \tan z \qquad \Longrightarrow \qquad \tan z = \frac{t}{1} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras
$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2$ $\qquad \text{hip.} = \sqrt{(1)^2 + t^2}$



entonces,

$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

es decir,

$$\int \frac{t^2\ dt}{(t^2+1)^2} = \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} z\ \cos z + C = \frac{1}{2}\ \arctan t - \frac{1}{2}\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + C = \frac{1}{2}\ \arctan t - \frac{1}{2}\ \frac{t}{1+t^2} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{t^2\ dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ \arctan t - \frac{1}{2}\ \frac{t}{1+t^2} + C.$$

★

Ejemplo 272 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e}\ \operatorname{sen}^2 x\ \cos x\ dx}{\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 5}$.

Solución : Al completar cuadrado

$$\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 5 = (\operatorname{sen} x - 1)^2 + 4,$$

se escribe la integral como

$$\int \frac{\sqrt{e}\ \operatorname{sen}^2 x\ \cos x\ dx}{\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 5} = \sqrt{e}\ \int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ \cos x\ dx}{(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 4}.$$

Se hace la sustitución trigonométrica

$$\operatorname{sen} x - 1 = 2\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} x = 2\tan t + 1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad \cos x\ dx = 2\sec^2 t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ \cos x\ dx}{(\operatorname{sen} x-1)^2+4} = \int \frac{(2\tan t+1)^2\ \left(2\sec^2 t\ dt\right)}{(2\tan t)^2+4} = \int \frac{(2\tan t+1)^2\ \left(2\sec^2 t\ dt\right)}{4\tan^2 t+4}$$

$$= \int \frac{(2\tan t+1)^2\ \left(2\sec^2 t\ dt\right)}{4\left(\tan^2 t+1\right)} = \int \frac{(2\tan t+1)^2\ \left(2\sec^2 t\ dt\right)}{4\sec^2 t} = \int \frac{(2\tan t+1)^2}{2}\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (2\tan t+1)^2\ dt = \frac{1}{2}\int \left(4\tan^2 t+4\tan t+1\right)\ dt = 2\int \tan^2 t\ dt + 2\int \tan t\ dt + \frac{1}{2}\int dt,$$

donde

- Por la identidad trigonométrica $\tan^2 t+1=\sec^2 t$ se tiene que

$$\int \tan^2 t\ dt = \int \left(\sec^2 t-1\right)\ dt = \tan t - t + C_1.$$

- Puesto que, $\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$ se tiene que

$$\int \tan t\ dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\ dt$$

se propone el cambio de variable

$$u=\cos t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \operatorname{sen} t\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \operatorname{sen} t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan t\ dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\ dt = \int \frac{-\ du}{u} = -\ln|u| + C_2 = -\ln|\cos t| + C_2 = \ln\left|(\cos t)^{-1}\right| + C_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos t}\right| + C_2 = \ln|\sec t| + C_2,$$

por lo tanto,

$$\int \tan t\ dt = \ln|\sec t| + C_2.$$

- Por último, $\displaystyle\int dt = t + C_3$.

Entonces,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ \cos x\ dx}{(\operatorname{sen} x-1)^2+4} = 2\int \tan^2 t\ dt + 2\int \tan t\ dt + \frac{1}{2}\int dt$$

$$= 2\left(\tan t - t + C_1\right) + 2\left(\ln|\sec t| + C_2\right) + \frac{1}{2}\left(t + C_3\right) = 2\tan t - 2t + 2\ln|\sec t| + \frac{t}{2} + C_4$$

$$= 2\tan t + \ln\left|\sec^2 t\right| - \frac{3}{2}\ t + C_4 = 2\tan t + \ln\left|\tan^2 t+1\right| - \frac{3}{2}\ t + C_4,$$

donde $C_4 = 2C_1 + 2C_2 + \dfrac{1}{2}C_3$. Así,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \ \cos x \ dx}{(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 4} = 2\tan t + \ln\left|\tan^2 t + 1\right| - \frac{3}{2}\ t + C_4,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = 2\tan t + \ln\left|\tan^2 t + 1\right| - \dfrac{3}{2}\ t + C_4$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$\operatorname{sen} x - 1 = 2\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} x - 1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right),$$

de aquí,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \ \cos x \ dx}{(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 4} &= 2\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right) + \ln\left|\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right)^2 + 1\right| - \frac{3}{2}\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right) + C_4 \\
&= \operatorname{sen} x - 1 + \ln\left|\frac{(\operatorname{sen} x - 1)^2}{4} + 1\right| - \frac{3}{2}\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right) + C_4 \\
&= \operatorname{sen} x - 1 + \ln\left|\frac{(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 1}{4}\right| - \frac{3}{2}\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right) + C_4 \\
&= \operatorname{sen} x - 1 + \ln\left|(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 1\right| - \ln 4 - \frac{3}{2}\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right) + C_4 \\
&= \operatorname{sen} x + \ln\left|(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 1\right| - \frac{3}{2}\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right) + C,
\end{aligned}$$

donde, $C = C_4 - 1 - \ln 4$, por lo tanto,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \ \cos x \ dx}{(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 4} = \operatorname{sen} x + \ln\left|(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 1\right| - \frac{3}{2}\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right) + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{\sqrt{e}\ \operatorname{sen}^2 x \ \cos x \ dx}{\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 5} = \sqrt{e}\ \operatorname{sen} x + \sqrt{e}\ \ln\left|(\operatorname{sen} x - 1)^2 + 1\right| - \frac{3\sqrt{e}}{2}\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{2}\right) + C.$$

★

Ejemplo 273 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 4x - 2}\ dx$.

Solución : Completamos cuadrado

$$x^2 + 4x - 2 = (x + 2)^2 - 6,$$

con lo que,

$$\int \sqrt{x^2 + 4x - 2}\ dx = \int \sqrt{(x + 2)^2 - 6}\ dx.$$

Se hace el cambio trigonométrico

$$x + 2 = \sqrt{6}\ \sec t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dx = \sqrt{6}\ \sec t\ \tan t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt{x^2+4x-2}\ dx = \int \sqrt{\left(\sqrt{6}\sec t\right)^2 - 6}\ \left(\sqrt{6}\ \sec t\ \tan t\right) dt = \sqrt{6}\int \sqrt{6\sec^2 t - 6}\ \sec t\ \tan t\ dt$$

$$= \sqrt{6}\int \sqrt{6\left(\sec^2 t - 1\right)}\ \sec t \tan t\ dt = \sqrt{6}\int \sqrt{6\ \tan^2 t}\ \sec t\ \tan t\ dt = 6\int \sec t\ \tan^2 t\ dt,$$

donde,

$$\int \sec t\ \tan^2 t\ dt = \int \sec t\ \left(\sec^2 t - 1\right) dt = \int \sec^3 t\ dt - \int \sec t\ dt$$

de aquí,

$$\int \sec t\ dt = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

mientras que, la integral de la secante cúbica se resuelve por el método de integración por partes. Escribimos la integral como

$$\int \sec^3 t\ dt = \int \sec^2 t\ \sec t\ dt.$$

Integramos por partes, con

$$\begin{aligned} u &= \sec t & &\xrightarrow{\text{Al derivar}} & du &= \sec t\ \tan t\ dt \\ dv &= \sec^2 t\ dt & &\xrightarrow{\text{Al integrar}} & v &= \tan t, \end{aligned}$$

La integral se transforma en

$$\int \sec^3 t\ dt = \sec t\ \tan t - \int \tan t\ \sec t\ \tan t\ dt = \sec t\ \tan t - \int \sec t\ \tan^2 t\ dt,$$

es conocido que

$$\tan^2 t = \sec^2 t - 1,$$

así,

$$\int \sec^3 t\ dt = \sec t\ \tan t - \int \sec t\ \overbrace{\tan^2 t}^{\boxed{\tan^2 t = \sec^2 t - 1}}\ dt = \sec t\ \tan t - \int \sec t\left(\sec^2 t - 1\right)\ dt$$

$$= \sec t\ \tan t - \int \left(\sec^3 t - \sec t\right)\ dt = \sec t\ \tan t - \int \sec^3 t\ dt + \int \sec t\ dt$$

$$= \sec t\ \tan t - \int \sec^3 t\ dt + \ln|\sec t + \tan t| + C_1,$$

es decir,

$$\int \sec^3 t\ dt = \sec t\ \tan t - \int \sec^3 t\ dt + \ln|\sec t + \tan t| + C_1,$$

de aquí,

$$2\int \sec^3 t\ dt = \sec t\ \tan t + \ln|\sec t + \tan t| + C_1,$$

con lo que,

$$\int \sec^3 t\ dt = \frac{1}{2}\ \sec t\ \tan t + \frac{1}{2}\ \ln|\sec t + \tan t| + C.$$

Entonces, tenemos

$$\int \sqrt{x^2+4x-2}\ dx = 6\int \sec t\ \tan^2 t\ dt = 6\left[\int \sec^3 t\ dt - \int \sec t\ dt\right]$$

$$= 6\left[\frac{1}{2}\sec t\ \tan t + \frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t| - \ln|\sec t+\tan t|\right] + C$$

$$= 6\left[\frac{1}{2}\sec t\ \tan t - \frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|\right] + C = 3\sec t\ \tan t - 3\ln|\sec t+\tan t| + C,$$

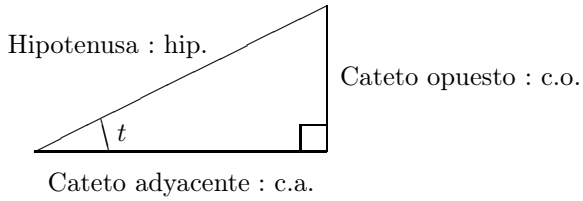
de quí,

$$\int \sqrt{x^2+4x-2}\ dx = 3\sec t\ \tan t - 3\ln|\sec t+\tan t| + C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = 3\sec t\ \tan t - 3\ln|\sec t+\tan t| + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$x+2 = \sqrt{6}\ \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x+2}{\sqrt{6}} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos t = \frac{\sqrt{6}}{x+2}.$$

Para calcular $\tan t$ en función de x, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

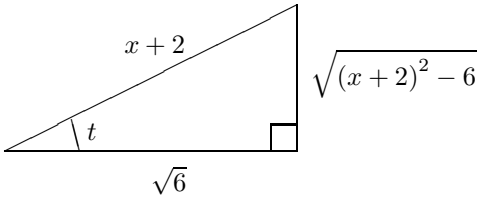
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$x+2 = \sqrt{6}\ \sec t \qquad \Longrightarrow \qquad \sec t = \frac{x+2}{\sqrt{6}} = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.o.} = \sqrt{(x+2)^2-6}$$



entonces,

$$\tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{(x+2)^2-6}}{\sqrt{6}}.$$

Luego,

$$\int \sqrt{x^2+4x-2}\ dx = 3\ \frac{x+2}{\sqrt{6}}\ \frac{\sqrt{(x+2)^2-6}}{\sqrt{6}} - 3\ln\left|\frac{x+2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{(x+2)^2-6}}{\sqrt{6}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ (x+2)\sqrt{x^2+4x-2} - 3\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x-2}}{\sqrt{6}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ (x+2)\sqrt{x^2+4x-2} - 3\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-2}\right| - \ln\sqrt{6} + C$$

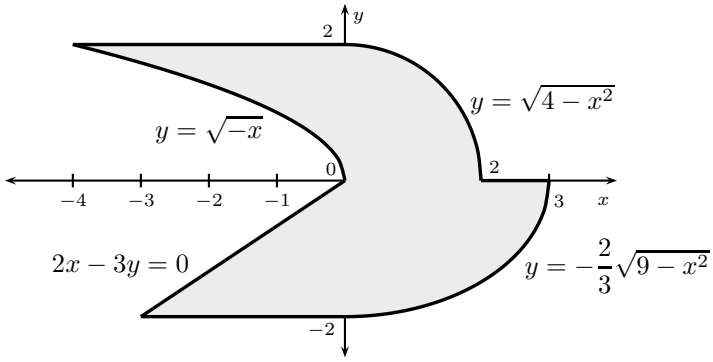
$$= \frac{1}{2}\ (x+2)\sqrt{x^2+4x-2} - 3\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-2}\right| + C,$$

así,

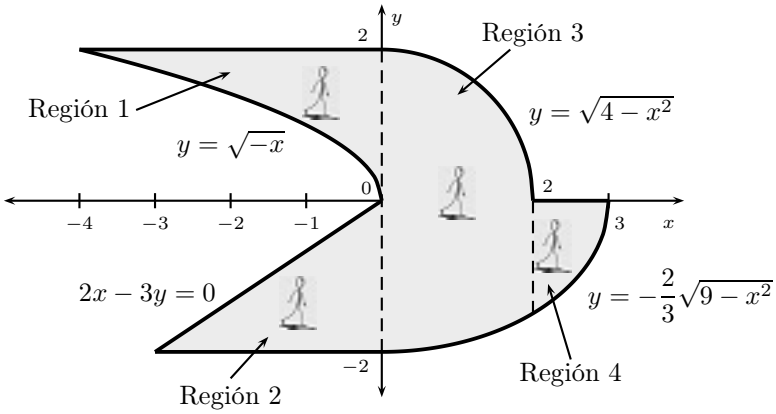
$$\int \sqrt{x^2+4x-2}\,dx = \frac{1}{2}\,(x+2)\sqrt{x^2+4x-2} - 3\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-2}\right| + C.$$

★

Ejemplo 274 *: Hallar el área de la región dada en la gráfica*



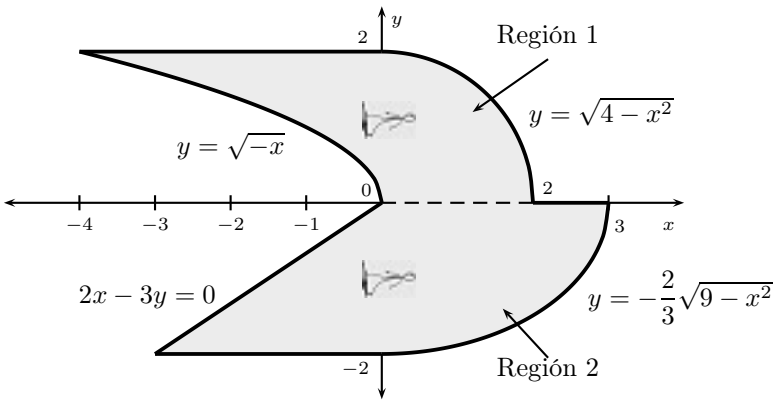
Solución : Al desplazarnos sobre el eje x, en el intervalo $[-4,3]$, observamos que la región se divide en cuatro subregiones



entonces, el área de la región viene dada por la suma de las áreas de estas cuatro subregiones, así,

$$A = \int_{-4}^{0}\left(2-\sqrt{-x}\right)dx + \int_{-3}^{0}\left(\frac{2}{3}x-(-2)\right)dx + \int_{0}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}-\left(-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)\right)dx$$
$$+\int_{2}^{3}\left(0-\left(-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)\right)dx.$$

pero, observemos que si nos desplazamos a lo largo del eje y, por el intervalo $[-2,2]$, entonces la región se divide en dos subregiones



así, el área de la región viene dada por la suma de las áreas de estas dos subregiones.

Puesto que nos desplazamos en el eje y, las integrales que proporcionan las áreas de estas dos subregiones deben estar dadas en la variable y, por esta razón debemos expresar las funciones que limitan la región en variable y, para ello despejamos x.

- Curva 1: $y = \sqrt{-x}$, tenemos

$$y = \sqrt{-x} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = -x \quad \Longrightarrow \quad x = -y^2.$$

- Curva 2: $y = \sqrt{4 - x^2}$, tenemos

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 4 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{4 - y^2},$$

como la gráfica de la función $y = \sqrt{4 - x^2}$ se encuentra en el primer cuadrante, entonces, $x > 0$, así,

$$x = \sqrt{4 - y^2}.$$

- Curva 3: $2x - 3y = 0$, tenemos

$$2x - 3y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 3y \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{2}y.$$

- Curva 4: $y = -\dfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, tenemos

$$y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{3}{2}y = \sqrt{9 - x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{9}{4}y^2 = 9 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 9 - \frac{9}{4}y^2$$

$$\Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{9 - \frac{9}{4}y^2} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{9\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 3\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \pm 3\sqrt{\frac{4 - y^2}{4}} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2},$$

como la gráfica de la función $y = -\dfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ se encuentra en el tercer cuadrante, entonces, $x > 0$, así,

$$x = \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}.$$

El área viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0}\left(\frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2} - \frac{3}{2}y\right)dy + \int_{0}^{2}\left(\sqrt{4 - y^2} - (-y^2)\right)dy \\ &= \frac{3}{2}\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{4 - y^2} - y\right)dy + \int_{0}^{2}\left(\sqrt{4 - y^2} + y^2\right)dy \\ &= \frac{3}{2}\int_{-2}^{0}\sqrt{4 - y^2}\,dy - \frac{3}{2}\int_{-2}^{0}y\,dy + \int_{0}^{2}\sqrt{4 - y^2}\,dy + \int_{0}^{2}y^2\,dy, \end{aligned}$$

resolvemos las integrales

$$I_1 = \int_{-2}^{0}\sqrt{4 - y^2}\,dy, \qquad I_2 = \int_{-2}^{0}y\,dy, \qquad I_3 = \int_{0}^{2}\sqrt{4 - y^2}\,dy \qquad \text{e} \qquad I_4 = \int_{0}^{2}y^2\,dy.$$

- Observemos que las integrales I_1 e I_3 presentan la misma familia de primitiva, lo que cambia son los intervalos de integración, $[-2,0]$ para I_1 y $[0,2]$ para I_3.

  Por otra parte, la función $f(y)=\sqrt{4-y^2}$, es una función par, ya que

$$f(-y)=\sqrt{4-(-y)^2}=\sqrt{4-y^2}=f(y),$$

  por lo que, $I_1=I_3$.

  Resolvemos la integral indefinida $\displaystyle\int\sqrt{4-y^2}\,dy$.

  Hacemos el cambio trigonométrico

$$y=2\ \operatorname{sen}t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dy=2\ \cos t\ dt,$$

  con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

  Entonces, la integral queda

$$\begin{aligned}\int\sqrt{4-y^2}\,dy&=\int\sqrt{4-(2\operatorname{sen}t)^2}\,(2\cos t)\ dt=2\int\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2t}\ \cos t\ dt\\&=2\int\sqrt{4\left(1-\operatorname{sen}^2t\right)}\ \cos t\ dt=2\int\sqrt{4\cos^2t}\ \cos t\ dt=4\int\cos^2t\ dt\\&=4\int\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\frac{4}{2}\int(1+\cos(2t))\,dt=2\left[\int dt+\int\cos(2t)\,dt\right],\end{aligned}$$

  donde

$$\int dt=t+C_1,$$

  mientras que, para la integral $\displaystyle\int\cos(2t)\,dt$, se propone el cambio de variable

$$u=2t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=2\ dt \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{du}{2}=dt,$$

  con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

  Entonces, la integral queda

$$\int\cos(2t)\,dt=\int\cos u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int\cos u du=\frac{1}{2}\operatorname{sen}u+C_2=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)+C_2.$$

  Luego,

$$\int\cos^2t\ dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]+C_3=\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}+C_3=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}t\cos t+C_3,$$

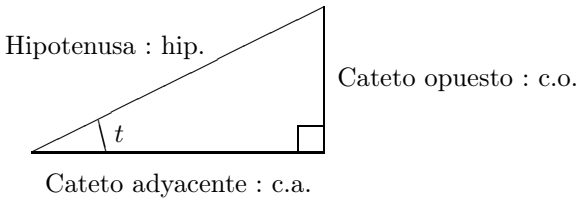
  así,

$$\int\sqrt{4-x^2}\ dx=4\int\cos^2t\ dt=4\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}t\cos t+C_3\right)=2t+2\operatorname{sen}t\cos t+C,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = 2t + 2\operatorname{sen} t \cos t + C$, en términos de la variable original de integración x, puesto que

$$y = 2\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{y}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Para calcular $\cos t$ en función de y, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

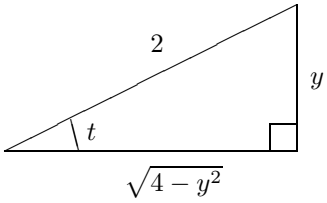
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$y = 2\operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{y}{2} = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{c.a.} = \sqrt{(2)^2 - y^2}$$



entonces,

$$\cos t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2},$$

es decir,

$$\int \sqrt{4-y^2}\, dy = 2t + 2\operatorname{sen} t \cos t + C = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right) + 2\,\frac{y}{2}\,\frac{\sqrt{4-y^2}}{2} + C,$$

luego

$$\int \sqrt{4-y^2}\, dy = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\,\sqrt{4-y^2}}{2} + C,$$

de aquí,

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{4-y^2}\, dy = \left(2\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\,\sqrt{4-y^2}}{2}\right|_{-2}^{0}$$

$$= \overbrace{\left(2\operatorname{arcsen}\left(\frac{(0)}{2}\right) + \frac{(0)\,\sqrt{4-(0)^2}}{2}\right)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}} - \overbrace{\left(2\operatorname{arcsen}\left(\frac{(-2)}{2}\right) + \frac{(-2)\,\sqrt{4-(-2)^2}}{2}\right)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}$$

$$= 2\operatorname{arcsen}(0) + \frac{(0)\sqrt{4}}{2} - 2\operatorname{arcsen}(-1) - \frac{(-2)\sqrt{0}}{2} = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

así,

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{4-y^2}\, dy = \int_{0}^{2} \sqrt{4-y^2}\, dy = \pi.$$

- Calculamos $\displaystyle\int_{-2}^{0} y\ dy.$

$$\int_{-2}^{0} y\ dy = \left(\frac{y^2}{2}\right|_{-2}^{0} = \overbrace{\frac{(0)^2}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}} - \overbrace{\frac{(-2)^2}{2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}} = 0 - \frac{4}{2} = -2.$$

- Calculamos $\displaystyle\int_{0}^{2} y^2\ dy.$

$$\int_{0}^{2} y^2\ dy = \left(\frac{y^3}{3}\right|_{0}^{2} = \overbrace{\frac{(2)^3}{3}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}} - \overbrace{\frac{(0)^3}{3}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

El área viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{2}\int_{-2}^{0} \sqrt{4-y^2}\ dy - \frac{3}{2}\int_{-2}^{0} y\ dy + \int_{0}^{2} \sqrt{4-y^2}\ dy + \int_{0}^{2} y^2\ dy \\ &= \frac{3}{2}(\pi) - \frac{3}{2}(-2) + \pi + \frac{8}{3} \ = \ \frac{5}{2}\pi + 3 + \frac{8}{3} + \frac{17}{3} \ = \ \frac{5}{2}\pi + \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Luego, $\quad A = \dfrac{5}{2}\pi + \dfrac{17}{3}.$ ★

Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales haciendo la sustitución trigonométrica apropiada.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ 3. $\displaystyle\int \frac{dt}{7+2t^2}$ 4. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sqrt{9+\theta^2}}$ 5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2-b}}$ 7. $\displaystyle\int \frac{y\ dy}{(y^2+4)^{5/2}}$ 8. $\displaystyle\int \frac{y^2\ dy}{(y^2+4)^{5/2}}$ 9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2-25)^{3/2}}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}$ 11. $\displaystyle\int 5t\ \sqrt{1+t^2}\ dt$ 12. $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x + 12}$ 13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

14. $\displaystyle\int \sqrt{2t-t^2}\ dt$ 15. $\displaystyle\int e^t\ \sqrt{9-e^{2t}}\ dt$ 16. $\displaystyle\int \sqrt{5-4t-t^2}\ dt$ 17. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{5-x^2}}$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ 19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\ \sqrt{x^2-2}}$ 20. $\displaystyle\int \frac{3x\ dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ 21. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\ dx$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ 23. $\displaystyle\int \frac{e^x\ dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$ 24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$ 25. $\displaystyle\int \frac{t\ dt}{\sqrt{a^4-t^4}}$

26. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ 27. $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\ dx}{x^2+2x+2}$ 28. $\displaystyle\int \sqrt{e^{2t}-9}\ dt$ 29. $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\ dx}{x^2-6x+18}$

30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} t\ \cos t}{9+\cos^4 t}\ dt$ 31. $\displaystyle\int \frac{\sec^2(2x)}{9+\tan^2(2x)}\ dx$ 32. $\displaystyle\int \frac{\ln x\ dx}{x\ \sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$

33. $\displaystyle\int \frac{3x^2\ dx}{2x^2+5}$ 34. $\displaystyle\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{7+x^2}}$ 35. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{(x+6)^2}$ 36. $\displaystyle\int \frac{\tan^7 x+\tan^5 x}{\tan^4(\pi/4)+\tan^4 x}\ dx$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\ \sqrt{x^2-5}}$ 38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e^{3x}}\ dx}{(e^{-x}+e^x)^{5/2}}$ 39. $\displaystyle\int \frac{e^{-3x}\ dx}{(e^{2x}-9)^{3/2}}$ 40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$ 42. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{8x^3-x^6-13}}$ 43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ 44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{16+x^2}$ 46. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+x^2}$ 47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}$ 48. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ \sqrt{x^2+3}}$

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\ \sqrt{1-x^2}}$ 50. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ 51. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ dx$ 52. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ \sqrt{x^2+9}}$ 54. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\ dx$ 55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\ \sqrt{x^2-16}}$ 56. $\displaystyle\int \sqrt{1-4r^2}\ dr$

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{5/2}}$ 58. $\displaystyle\int t\ \sqrt{4-t^2}\ dt$ 59. $\displaystyle\int \frac{t^3\ dt}{\sqrt{t^2+4}}$ 60. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$

61. $\displaystyle\int x^2\ \sqrt{4-9x^2}\ dx$ 62. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+5}}\ dx$ 63. $\displaystyle\int x^2\ \sqrt{9-x^2}\ dx$

64. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\ dx}{\sqrt{1+e^{2x}+e^{4x}}}$ 65. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\ \sqrt{16x^2-9}}$ 66. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\ \sqrt{x^2+9}}$ 67. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

68. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}$ 69. $\displaystyle\int \frac{4x^2\ dx}{7+5x^2}$ 70. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+6x}}$ 71. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$

72. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\ \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x+5}\ dx$ 73. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{(x-4)^2}$ 74. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ (1-x^2)^{3/2}}$ 75. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+19}}$

76. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x^4-8x^2+3}}$ 77. $\displaystyle\int \frac{(x-1)\ dx}{x^{3/2}+\sqrt{x}}$ 78. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\ dx}{6e^{-x}-6e^x}$ 79. $\displaystyle\int \left(x^2-1\right)^{5/2} dx$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x+2}$ 81. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ 82. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$ 83. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{x^4-4x^2+3}$

84. $\displaystyle\int x^3\ \sqrt{4-9x^2}\ dx$ 85. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$ 86. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ 87. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

88. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ 89. $\displaystyle\int \sqrt{t-t^2}\ dt$ 90. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\ dx}{\sqrt{\tan^2 x-2}}$ 91. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{x^2-6x+10}$

92. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+5}\ dx$ 93. $\displaystyle\int \sqrt{t^2+1}\ dt$ 94. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^2}\ dt$ 95. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$

96. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+1)\ \sqrt{t^2+2t}}$ 97. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 98. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{16+\cos^2 x}$ 99. $\displaystyle\int \frac{2y+1}{\sqrt{y^2+9}}\ dy$

100. $\displaystyle\int \sqrt{1-2t-t^2}\ dt$ 101. $\displaystyle\int \frac{a^x\ dx}{1+a^{2x}}$ 102. $\displaystyle\int \frac{y^3\ dy}{\left(y^2+4\right)^{3/2}}$ 103. $\displaystyle\int \frac{(3x-6)\ dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

104. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}}$ 105. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ 106. $\displaystyle\int \frac{y\ dy}{\sqrt{16-9y^4}}$ 107. $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\ dx}{x^2+2x+2}$

108. $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\ dx}{x^2-6x+18}$ 109. $\displaystyle\int \frac{t^2\ dt}{\left(t^2+1\right)^2}$ 110. $\displaystyle\int \frac{3x\ dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ 111. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$

112. $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\ dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ 113. $\displaystyle\int \frac{dz}{z\ \sqrt{1-z^2}}$ 114. $\displaystyle\int \frac{y^2\ dy}{\left(9-y^2\right)^{5/2}}$ 115. $\displaystyle\int \frac{(2x-8)\ dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

116. $\displaystyle\int \sqrt{2-x-x^2}\ dx$ 117. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+26}}$ 118. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e}\ \operatorname{sen}^2 x\ \cos x}{\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x+5}\ dx$

119. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{16+6t-t^2}}$ 120. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{4t-2t^2}}$ 121. $\displaystyle\int \frac{2t\ dt}{\sqrt{t^2-2t}}$ 122. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\ dx$

123. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{16+4t-2t^2}}$ 124. $\displaystyle\int \frac{2t\ dt}{\sqrt{t^2-2t+26}}$ 125. $\displaystyle\int \frac{\ln x\ dx}{x\ \sqrt{4\ln^2 x-\ln^4 x-1}}$

126. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\ dx$ 127. $\displaystyle\int x^3\sqrt[5]{x^2-1}\ dx$ 128. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\ dx$ 129. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\ dx$

130. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^{3x}}\ dx$ 131. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}\ dx}{\sqrt{e^{2x}-7}}$ 132. $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x^2-4}\ dx$ 133. $\displaystyle\int \left(x^2+5\right)^{3/2}\ dx$

134. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2\left(\arctan(2x)\right)}{\sec^2\left(\operatorname{arcsen} x\right)}\ dx$ 135. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\ dx$ 136. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\ dx$

2. Calcular las siguientes integrales

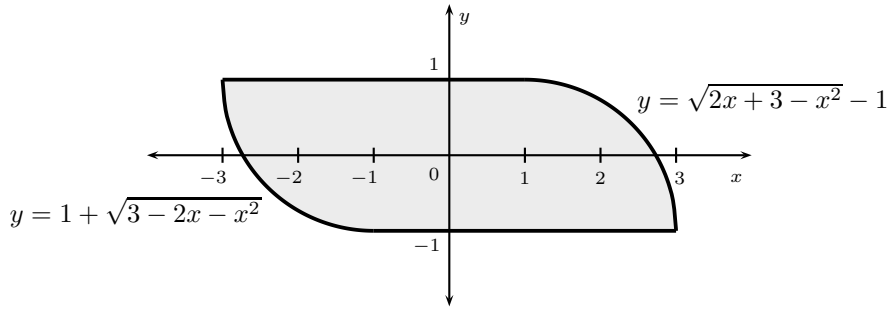
1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^2\ dx}{\sqrt{1+x^2}}$ 3. $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{x\ dx}{x^2-2x}$ 4. $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

5. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}/2} x^2\ \sqrt{3-x^2}\ dx$ 6. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4x-x^2}\ dx$ 7. $\displaystyle\int_0^{8/5} \sqrt{4-y^2}\ dy$

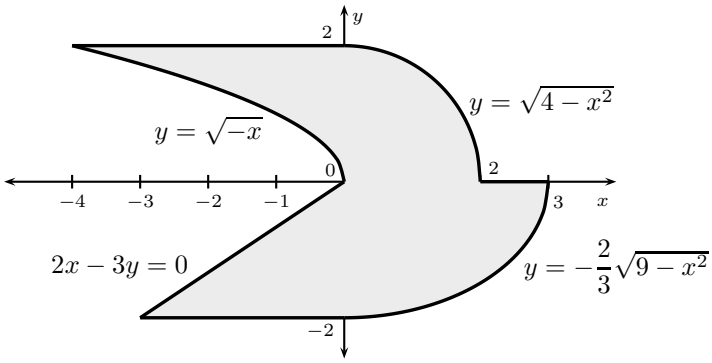
8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4+1}{\sqrt{5-x^2}}dx$ 9. $\displaystyle\int_0^2 x\ \sqrt{2x-x^2}\ dx$ 10. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln x\ dx}{x\ \sqrt{\ln^2 x+3}}$

11. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x^2+2}{x^2-2x+4}\ dx$ 12. $\displaystyle\int_1^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\ dx$

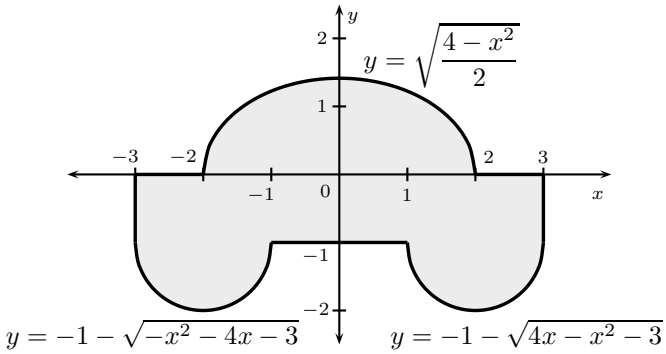
3. Hallar el área de la región dada en la gráfica



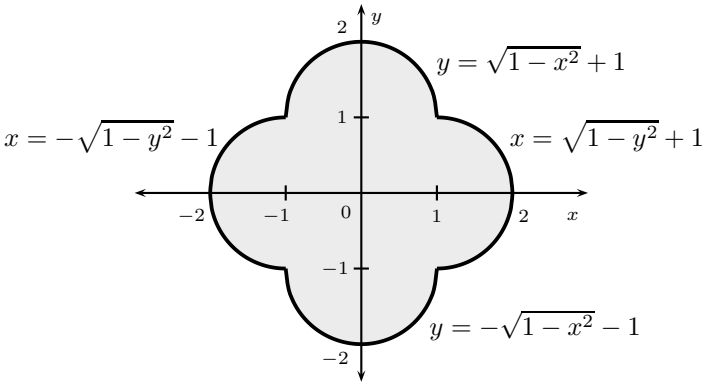
4. Hallar el área de la región dada en la gráfica



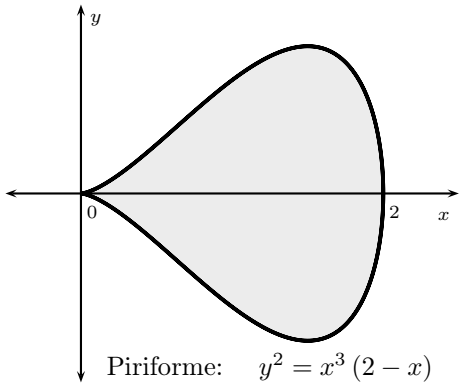
5. Hallar el área de la región dada en la gráfica



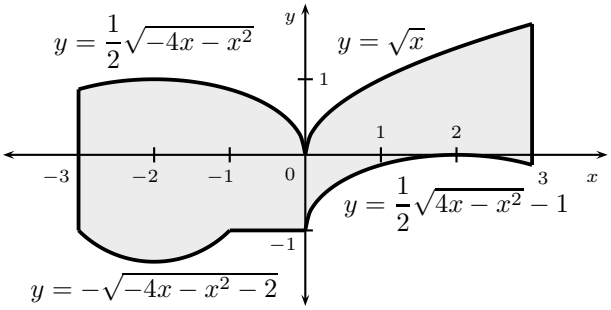
6. Hallar, usando integrales, el área de la región dada en la gráfica



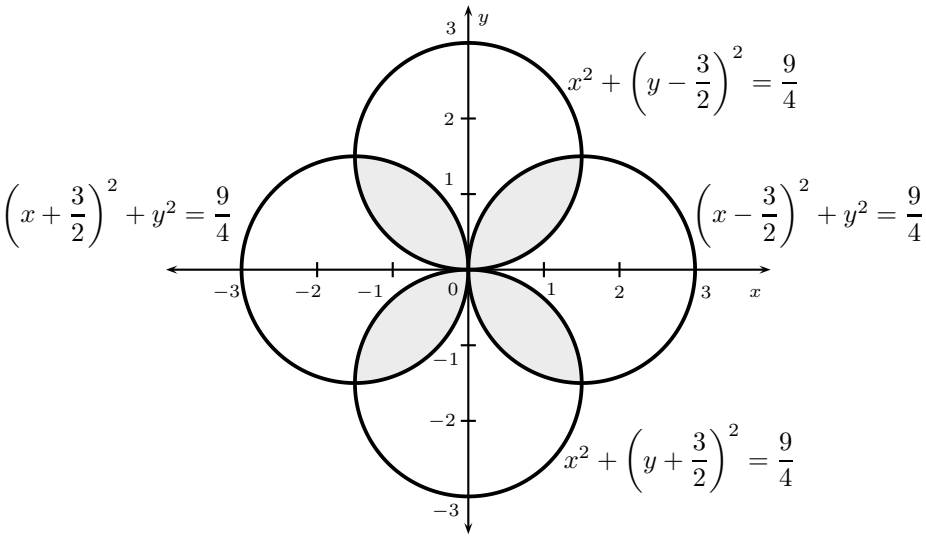
7. Hallar el área de la región dada en la gráfica



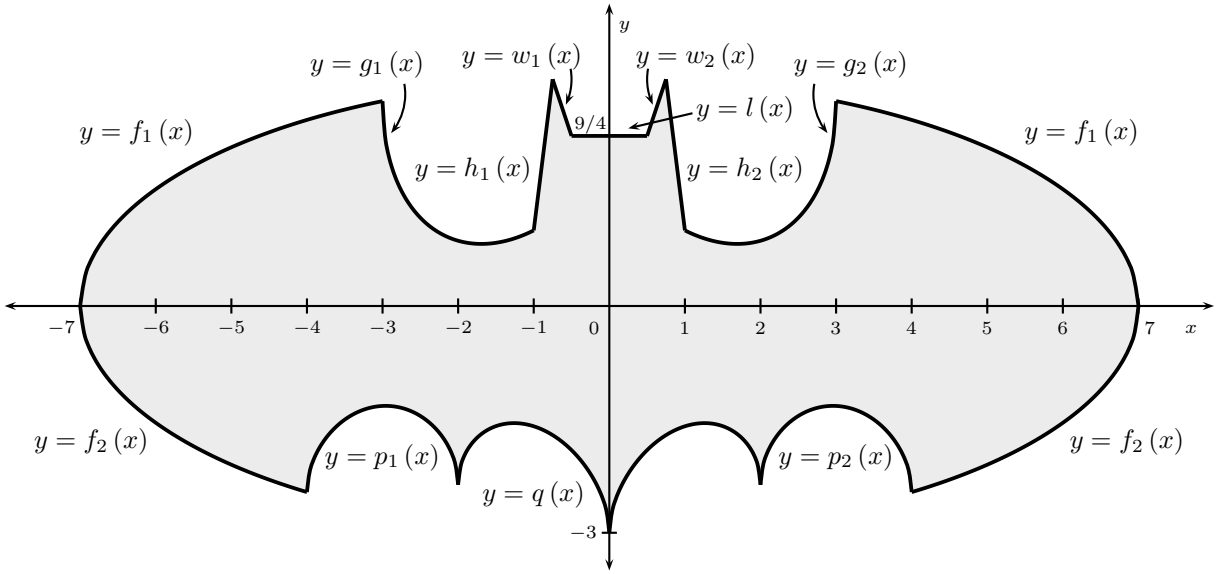
8. Hallar el área de la región dada en la gráfica



9. Hallar el área de la región sombreada dada en la gráfica



10. Hallar el área de la región dada en la gráfica



donde

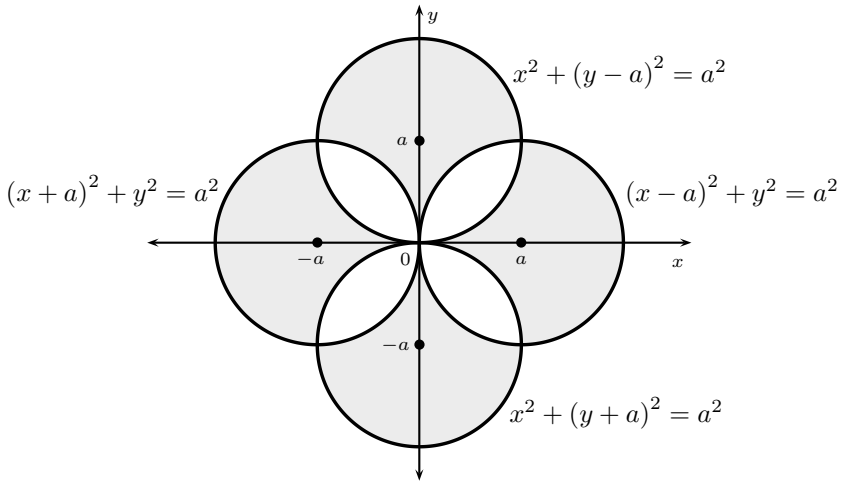
$$f_1(x) = 3\sqrt{1 - \left(\frac{x}{7}\right)^2} \qquad f_2(x) = -3\sqrt{1 - \left(\frac{x}{7}\right)^2} \qquad g_1(x) = 4.21052 + \frac{x}{2} - 1.35526\sqrt{2x - x^2 + 3}$$

$$g_2(x) = 4.21052 - \frac{x}{2} - 1.35526\sqrt{2x - x^2 + 3} \qquad h_1(x) = 8x + 9 \qquad h_2(x) = 9 - 8x \qquad l(x) = \frac{9}{4}$$

$$w_1(x) = -3x + \frac{3}{4} \qquad w_2(x) = 3x + \frac{3}{4} \qquad p_1(x) = -0.0913722x^2 - \frac{x}{2} - 3 + \sqrt{-x^2 - 6x - 8}$$

$$p_2(x) = -0.0913722x^2 + \frac{x}{2} - 3 + \sqrt{6x - x^2 - 8} \qquad q(x) = -0.0913722x^2 + \frac{|x|}{2} - 3 + \sqrt{2|x| - x^2}$$

11. Hallar el área de la región sombreada dada en la gráfica



12. Sea R la región limitada por las curvas de ecuación

$$y = (x-2)^2, \qquad y = -\sqrt{4 - x^2}, \qquad x = \frac{y-4}{2}.$$

a. Dibuje la región R.

b. Calcular el área de la región R.

13. Hallar el área de la región limitada por la circunferencia $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ y los ejes coordenados.

14. Verifique, usando integrales, que el área de una circunferencia de centro $C(a,b)$ y radio r, es $A = \pi r^2$.

15. Verifique, usando integrales, que el área de la elipse de ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

es $A = ab\pi$.

16. Calcular, usando integrales, el área limitada por $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} \leq 1$ y $x^2 + y^2 \geq 1$.

17. Calcular, usando integrales, el área limitada por $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{2} \geq 1$ y $x^2 + y^2 \geq 25$.

18. Calcular el área de la región dada por $x^2 + y^2 \leq 4$ y $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 \leq 0$.

Respuestas: Ejercicios

1.1. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{4}x\right) + C$; 1.2. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C$; 1.3. $\frac{\sqrt{14}}{14}\arctan\left(\frac{\sqrt{14}}{7}t\right) + C$; 1.4. $\ln\left|\theta + \sqrt{\theta^2 + 9}\right| + C$;

1.5. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}\right| + C$; 1.6. $\frac{\sqrt{a}}{a}\ln\left|\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 - b}\right| + C$; 1.7. $-\frac{1}{3}\left(y^2 + 4\right)^{-3/2} + C$; 1.8. $\frac{1}{12}\frac{y^3}{(y^2+4)^{3/2}} + C$;

1.9. $-\frac{1}{25}\frac{x}{\sqrt{4x^2 - 25}} + C$; 1.10. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x\right) + C$; 1.11. $\frac{5}{3}\left(1 + t^2\right)^{3/2} + C$; 1.12. $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x - 3}{\sqrt{3}}\right) + C$;

1.13. $\frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C$; 1.14. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(t-1) + \frac{1}{2}(t-1)\sqrt{2t - t^2} + C$; 1.15. $\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{e^t}{3}\right) + \frac{1}{2}e^t\sqrt{9 - e^{2t}} + C$;

1.16. $\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{t+2}{3}\right)+\frac{t+2}{2}\sqrt{5-4t-t^2}+C$; 1.17. $\frac{5}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right)-\frac{1}{2}x\sqrt{5-x^2}+C$; 1.18. $\ln\left|\sqrt{x^2+4x+5}+x+2\right|+C$;

1.19. $\frac{\sqrt{x^2-2}}{4x}-\frac{\left(x^2-2\right)^{3/2}}{2x^3}+C$; 1.20. $3\sqrt{x^2+2x+5}-3\ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}+x+1\right|+C$; 1.21. $\sqrt{9x^2-4}-2\arccos\left(\frac{2}{3x}\right)+C$;

1.22. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$; 1.23. $\ln\left(1+2e^x+2\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right)+C$; 1.24. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{5}\right)+C$; 1.25. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{t^2}{a^2}\right)+C$;

1.26. $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right)-\sqrt{4x-x^2}+C$; 1.27. $\arctan(x+1)+\ln\left|x^2+2x+2\right|+C$; 1.28. $3\sqrt{e^{2t}-9}-3\arccos\left(e^t\right)+C$;

1.29. $\ln\left|x^2-6x+18\right|+\frac{5}{3}\arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)+C$; 1.30. $-\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{\cos^2 t}{3}\right)+C$; 1.31. $\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{3}\right)+C$;

1.32. $-2\operatorname{arcsen}\left(\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{1-\ln^2 x-4\ln x}+C$; 1.33. $\frac{3}{2}x-\frac{3\sqrt{10}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{10}}{5}x\right)+C$; 1.34. $\frac{1}{3}\sqrt{x^2+7}\left(x^2-14\right)+C$;

1.35. $\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{6}}\right)-\frac{\sqrt{x}}{x+6}+C$; 1.36. $\frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\arctan\left(\tan^2 x\right)+C$; 1.37. $\frac{1}{5x}\sqrt{x^2-5}+C$;

1.38. $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\left(e^{2x}+1\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}+C$; 1.39. $\frac{1}{2187}\left(\sqrt{\frac{e^{2x}-9}{e^{2x}}}\right)^3-\frac{1}{729}\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-9}}-\frac{2}{729}\sqrt{\frac{e^{2x}-9}{e^{2x}}}+C$; 1.40. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)+C$;

1.41. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)+C$; 1.42. $-\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(4-x^3\right)\right)+C$; 1.43. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$; 1.44. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C$;

1.45. $\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right)+C$; 1.46. $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C$; 1.47. $\frac{1}{3}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}\right|+C$;

1.48. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}-\frac{\sqrt{3}}{x}\right|+C$; 1.49. $-\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}+C$; 1.50. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$;

1.51. $\sqrt{1-x^2}+\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$; 1.52. $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+C$; 1.53. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}-\frac{3}{x}\right|+C$;

1.54. $\frac{1}{3a^2}\left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right)^{3/2}+C$; 1.55. $\frac{1}{128}\arccos\left(\frac{4}{x}\right)+\frac{1}{32}\frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}+C$; 1.56. $\frac{1}{4}\operatorname{arcsen}(2r)+\frac{1}{2}r\sqrt{1-4r^2}+C$;

1.57. $\frac{1}{243}\frac{(x+2)^3}{\left(5-4x-x^2\right)^{3/2}}+\frac{1}{81}\frac{x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}+C$; 1.58. $\frac{1}{3}\sqrt{4-t^2}\left(t^2-4\right)+C$; 1.59. $\frac{1}{3}\sqrt{t^2+4}\left(t^2-8\right)+C$;

1.60. $-\sqrt{1-x^2}+C$; 1.61. $\frac{2}{27}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3x}{2}\right)-\frac{x}{72}\left(4-9x^2\right)^{3/2}+\frac{x^3}{2}\sqrt{4-9x^2}+C$;

1.62. $2\sqrt{x^2-4x+5}+3\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C$; 1.63. $\frac{81}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{x}{8}\left(9-x^2\right)^{3/2}+\frac{x^3}{8}\sqrt{9-x^2}+C$;

1.64. $\frac{1}{2}\ln\left(2e^{2x}+1+2\sqrt{e^{4x}+e^{2x}+1}\right)+C$; 1.65. $\frac{1}{9x}\sqrt{16x^2-9}+C$; 1.66. $-\frac{1}{9x}\sqrt{x^2+9}+C$;

1.67. $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+8}\right|+C$; 1.68. $C-\ln\left|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}\right|$; 1.69. $\frac{4}{5}x-\frac{2\sqrt{35}}{25}\arctan\left(\frac{\sqrt{35}}{7}x\right)+C$;

1.70. $\sqrt{x^2+6x}-3\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x}\right|+C$; 1.71. $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x}\right|+C$; 1.72. $2\operatorname{sen}x-2\sqrt{5}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{sen}x\right)+C$;

1.73. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|-\frac{\sqrt{x}}{x-4}+C$; 1.74. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$; 1.75. $\ln\left(\frac{x-4}{3}+\sqrt{x^2-8x+19}\right)+C$;

1.76. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4+\sqrt{x^4-8x^2+3}\right|+C$; 1.77. $2\sqrt{x}-4\arctan\left(\sqrt{x}\right)+C$; 1.78. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right|-\frac{1}{6}e^x+C$;

1.79. $\frac{x}{48}\sqrt{x^2-1}\left(8x^4-26x^2+33\right)-\frac{5}{16}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; 1.80. $\ln\left(\sqrt{x}+x+2\right)-\frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\left(2\sqrt{x}+1\right)\right)+C$;

1.81. $\operatorname{arcsen}(2x-1)+C$; 1.82. $\frac{2\sqrt{11}}{11}\arctan\left(\frac{\sqrt{11}}{11}(6x-1)\right)+C$; 1.83. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|+C$;

1.84. $\sqrt{4-9x^2}\left(\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{135}x^2-\frac{32}{1215}\right)+C$; 1.85. $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$; 1.86. $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$;

1.87. $\frac{1}{2}\arctan(x+1)+\frac{x+1}{2x^2+4x+4}+C$; 1.88. $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{4x-3}{5}\right)+C$; 1.89. $\frac{1}{8}\operatorname{arcsen}(2t-1)+\frac{2t-1}{4}\sqrt{t-t^2}+C$;

1.90. $\ln\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x-2}\right|+C$; 1.91. $x+8\arctan(x-3)+3\ln\left|x^2-6x+10\right|+C$;

1.92. $2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}+C$; 1.93. $\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C$;

1.94. $\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|-\frac{\sqrt{t^2-4}}{t}+C$; 1.95. $\ln\left|2x+p+2\sqrt{x^2+px+q}\right|+C$; 1.96. $\arccos\left(\frac{1}{t+1}\right)+C$;

1.97. $\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C$; 1.98. $-\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{4}\cos x\right)+C$; 1.99. $2\sqrt{y^2+9}+\ln\left|y+\sqrt{y^2+9}\right|+C$;

1.100. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{t+1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2t-t^2}+C$; 1.101. $\frac{\arctan\left(a^x\right)}{\ln a}+C$; 1.102. $\frac{y^2+8}{\sqrt{y^2+4}}+C$; 1.103. $3\sqrt{x^2-4x+5}+C$;

1.104. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}(x+3)\right)+C$; 1.105. $6\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{4x-x^2}(6+x)+C$; 1.106. $\frac{1}{6}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}y^2\right)+C$;

1.107. $\arctan(-x-1)+\ln\left|x^2+2x+2\right|+C$; 1.108. $\ln\left|x^2-6x+18\right|+\frac{5}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$;

1.109. $\frac{1}{2}\arctan t-\frac{t}{2t^2+2}+C$; 1.110. $3\sqrt{x^2+2x+5}-3\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$;

1.111. $C-3\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)-2\sqrt{4-x^2}$; 1.112. $2\sqrt{x^2-4x+5}+3\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C$; 1.113. $\ln\left|\frac{1}{z}-\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}\right|+C$;

1.114. $\frac{1}{27}\left(\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}\right)^3+C$; 1.115. $-9\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}(2x+1)\right)-2\sqrt{1-x^2-x}+C$;

1.116. $\frac{9}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x+1}{3}\right)+\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{2-x-x^2}+C$; 1.117. $\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+26}\right|+C$;

1.118. $\sqrt{e}\ \operatorname{sen}x+\sqrt{e}\ \ln\left|(\operatorname{sen}x-1)^2+1\right|-\frac{3\sqrt{e}}{2}\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}x-1}{2}\right)+C$; 1.119. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{t-3}{5}\right)+C$;

1.120. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}(1-t)+C$; 1.121. $2\sqrt{t^2-2t}+2\ln\left(\sqrt{t^2-2t}+t-1\right)+C$;

1.122. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\operatorname{arcsen}x+C$; 1.123. $2\sqrt{t^2-2t+26}+2\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+26}\right|+C$;

1.124. $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{t-1}{3}\right)+C$; 1.125. $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\ln^2x-2\right)\right)-\sqrt{4\ln^2x-\ln^4x-1}+C$;

1.126. $\sqrt{x^2-1}-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$; 1.127. $\frac{5}{22}\left(x^2-1\right)^{6/5}\left(x^2+\frac{5}{6}\right)+C$; 1.128. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\left(1-\frac{1}{3}\frac{x^2-1}{x^2}\right)+C$;

1.129. $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{3}\frac{x^2+1}{x^3}+C$; 1.130. $-\frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{3}\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}}+C$; 1.131. $\sqrt{7e^{2x}-49}+C$;

1.132. $\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$; 1.133. $\frac{x}{8}\left(2x^2+25\right)\sqrt{x^2+5}+\frac{75}{8}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right|+C$;

1.134. $\frac{5x}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{5}{8}\arctan(2x)+C$; 1.135. $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+C$;

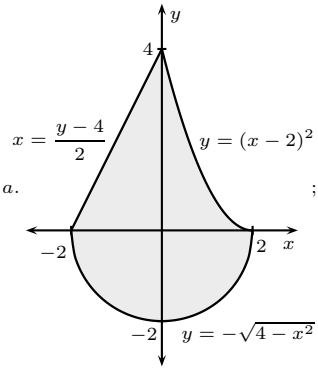
1.136. $\ln\left|\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x-2\right|+C$; 2.1. $\frac{1}{4}\pi$; 2.2. $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}+2}\right|$; 2.3. $-\ln 3$;

2.4. $\frac{1}{12}\pi$; 2.5. $\frac{9}{32}\pi$; 2.6. $\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 2.7. $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{96}{25}$; 2.8. $\frac{83}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)-\frac{23}{4}$;

2.9. $\frac{\pi}{2}$; 2.10. $\sqrt{7}-2$; 2.11. 4; 2.12. $\frac{37}{96}\sqrt{2}$; 3. $2\pi+4$; 4. $\frac{5}{2}\pi+\frac{17}{3}$;

5. $\left(1+\sqrt{2}\right)\pi+6$; 6. 8π; 7. π; 8. $\frac{1}{\pi}+\frac{9}{4}\sqrt{3}+5$; 9. $\frac{9}{2}\pi-9$;

10. 50.452; 11. $\frac{2}{3}a^2\left(3\sqrt{3}-\pi+6\right)$; 12.$a$.



; 12.b. $\frac{20}{3}+2\pi$;

13. $4-\pi$; 16. 7π; 17. $\left(25-3\sqrt{2}\right)\pi$; 18. $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{22}{25}+\frac{1}{4}\pi$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.